Gregorio Klimovsky
Guillermo Boido

LAS DESVENTURAS DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Filosofía de la matemática: una introducción

a-Z editora

Gregorio Klimovsky
Guillermo Boido

Las desventuras del conocimiento matemático

Filosofía de la matemática: una introducción

Prólogo de
Gladys Palau

a-Z editora

Imagen de tapa: el matemático Nikolaus Kratzer, quien fue astrónomo del rey Enrique VIII, retratado en 1528 por el maestro renacentista Hans Holbein el Joven (c. 1497-1543). Museo del Louvre. Foto: Focus.

© a•Z editora S.A.
Paraguay 2351 (C1121ABK)
Buenos Aires, Argentina.
Teléfonos: (011) 4961-4036 y líneas rotativas
Fax: (011) 4961-0089
Correo electrónico: info@az-editora.com.ar

Libro de edición argentina.
Hecho el depósito de ley 11.723.
Derechos reservados.

ISBN 950-534-796-0

Klimovsky, Gregorio
Las desventuras del conocimiento matemático / Gregorio Klimovsky y Guillermo Boido - 1a ed. - Buenos Aires : AZ, 2005.
326 p. ; 24x18 cm.

ISBN 950-534-796-0

1. Matemática-Educación Superior. I. Boido, Guillermo II. Título
CDD 510.711

Fecha de catalogación: 29/06/2005

A la memoria de Julio Rey Pastor,
cuyo magisterio permitió el desarrollo de la matemática
moderna en la Argentina

Índice general

Prólogo. Gladys Palau - 13

Asombro y conocimiento. Gregorio Klimovsky - 17

Sobre la socialización del conocimiento. Guillermo Boido - 19

1. *El porqué de este libro* - 21.

   ¿Por qué la matemática? (21), ¿Por qué la fundamentación de la matemática? (25), Fundamentación y filosofía de la matemática (27).

2. *Las concepciones de la matemática en el mundo antiguo 1: de Ahmés a Platón* - 29.

   Cuatro preguntas acerca de la matemática (29), El empirismo primitivo: Ahmés y el papiro Rhind (30), Tales de Mileto: la aparición de la idealización límite y la lógica (35), Pitágoras y el intuicionismo dualista (39), El problema de la inconmensurabilidad (43), Las concepciones matemáticas de Platón (47).

3. *Las concepciones de la matemática en el mundo antiguo 2: Aristóteles y la axiomática clásica* - 55.

   Introducción a Aristóteles (55), La noción aristotélica de conocimiento (58), Caracterización de la ciencia según Aristóteles: el método demostrativo (59), Comentarios a los supuestos aristotélicos acerca de la ciencia (64), Las limitaciones del método demostrativo o método axiomático clásico (72).

4. *La geometría de Euclides-Hilbert* - 75.

   Los *Elementos* de Euclides (75), Coda: sobre la historia de la matemática (82), La reformulación de Hilbert de la geometría euclideana (83).

5. *El surgimiento de las geometrías no euclideanas* - 89.

   Las aventuras del quinto postulado: de Euclides a Gauss (89), El apriorismo de Kant (96), Características de las geometrías no euclideanas (101), Problemas filosóficos planteados por las geometrías no euclideanas (103).

6. *Los sistemas axiomáticos formales* - 109.

   Los sistemas axiomáticos formales y el ajedrez (109), Caracterización de los sistemas axiomáticos formales (112), Cinco significados de la palabra "formal" (112), Sobre la lógica presupuesta (115), El vocabulario y las cuasiproposiciones (118), Los axiomas y los teoremas (119), Los sistemas axiomáticos desde un punto de vista filosófico (121), Los sistemas sintácticos y la matemática axiomática como lógica aplicada (122), Interpretaciones y modelos: acepción semántica (124), Interpretaciones y modelos: acepción sintáctica (127), Una digresión: los modelos en las ciencias fácticas (128), Matemática pura y matemática aplicada (129), Matemática, conocimiento y metaconocimiento (131).

7. *La construcción de un sistema axiomático* - 135.

Un ejemplo sencillo de sistema axiomático: SAFO (135), ¿Tiene SAFO modelos? (144), Ampliando el sistema SAFO: el sistema SAFOT (148).

8. *Propiedades generales y requisitos de los sistemas axiomáticos* - 151.

Las propiedades sintácticas de los sistemas axiomáticos (151), Consistencia (151), Completitud (152), Saturación (152), Independencia (152), Decidibilidad sintáctica (154), Las propiedades semánticas de los sistemas axiomáticos (155), Satisfactibilidad (155), Categoricidad semántica o por isomorfismo (155), Completitud semántica (156), Consistencia y satisfactibilidad (156), Decidibilidad semántica (159), La importancia filosófica de las propiedades de los sistemas axiomáticos (159), Lógica y sistemas sintácticos (161), Verdad y verdad lógica (162), Formalizaciones (163), Síntesis de las propiedades y requisitos más importantes de los sistemas axiomáticos (165).

9. *Las geometrías no euclideanas como sistemas axiomáticos: consistencia y modelos* - 167.

El problema de la consistencia de las geometrías no euclideanas (167), Consistencia y modelos: el modelo de Klein (168), Modelos relativos, absolutos e hipotéticos (173), Henri Poincaré y el convencionalismo (177), Tres tradiciones en la historia de la matemática (181), La tradición axiomática (181), La tradición computacional (181), La tradición estructural (183), Ciencias formales y ciencias fácticas (187).

10. *La matemática y las lógicas. La teoría de conjuntos* - 189.

Algo más sobre las lógicas subyacentes de un sistema axiomático formal (189), La lógica proposicional (190), La lógica elemental de predicados (191), La lógica superior de predicados (192), La teoría clásica de conjuntos (193).

11. *La aritmetización de la matemática 1: de la geometría euclideana a los números reales* - 201.

El surgimiento de la geometría analítica (201), Una digresión sobre números (207), Regreso a Pitágoras (208).

12. *La aritmetización de la matemática 2: de los números reales a los naturales* - 211.

Definiciones por abstracción y relaciones de equivalencia (211), Las clases de equivalencia y la aritmetización de la matemática (216), De las geometrías no euclideanas a los números naturales (219), El constructivismo matemático y la eliminación de entidades metafísicas (219).

13. *La axiomática de Peano y el modelo Russell: la reducción de la matemática a la lógica* - 223.

El sistema axiomático de Peano para los números naturales (223), ¿Tiene modelos el sistema axiomático de Peano? (227), La reducción de la matemática a la lógica: el modelo Russell (230), Dos versiones del logicismo (238), ¿Es consistente la lógica? (240).

14. *Las antinomias lógicas* - 243.

El surgimiento de las antinomias lógicas (243), Dos paradojas y tres antinomias (244), ¿Qué hacer ante las antinomias lógicas? (248).

15. *Los intentos de resolución de las antinomias*
1: la teoría de los tipos y el neointuicionismo - 249.

La teoría de los tipos de Russell (249), La teoría simple de los tipos (250), La teoría ramificada de los tipos (255), Dificultades de la teoría de los tipos (256), El neointuicionismo matemático (259), Dificultades del neointuicionismo (266).

16. *Los intentos de resolución de las antinomias*
2: las teorías axiomáticas de conjuntos - 269.

Las teorías axiomáticas de conjuntos (269), Sobre la posición formalista (274), Cuatro posiciones filosóficas acerca de la matemática (276), Metamatemática y metalenguajes (277).

17. *Los metateoremas de Gödel y las limitaciones de la matemática* - 281.

Los metateoremas de Gödel (1931) (281), La irresolubilidad del problema de la consistencia (286), Consecuencias filosóficas de los metateoremas de Gödel (289), Sobre la consistencia de la matemática y de la lógica: la situación actual (291).

18. *Filosofía y matemática: una relación compleja* - 293.

Objetos versus esquemas (293), La matemática en auxilio de la filosofía: Aquiles y la tortuga (295), La proyección del constructivismo matemático en la filosofía (296), Platón y el realismo matemático (297), ¿Qué clase de conocimiento proporciona la matemática? (299), Matemática y realidad (301), Términos matemáticos y términos fácticos (302), ¿Tiene sentido investigar en matemática? (305).

Apéndice. *El álgebra de Boole como ampliación del sistema SAFO* - 307.

Bibliografía. 311.

Índice temático y de nombres principales. 315.

Termesos Publisher, Goettingen, Germany / www.termessos.de

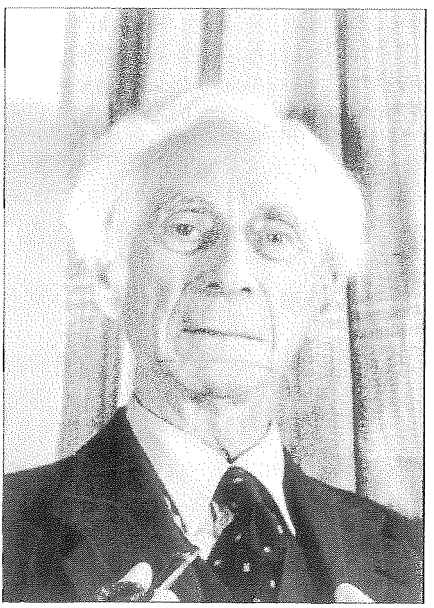


Foto: Editorial Perfil

Dos protagonistas centrales en la historia de la fundamentación y la filosofía de la matemática. A la izquierda, el alemán David Hilbert (1862-1943), cuyo nombre se vincula con el desarrollo de casi todas las ramas de la matemática contemporánea. A la derecha, el británico Bertrand Arthur William Russell (1872-1970), filósofo, lógico, matemático, educador y escritor, pacifista militante y defensor de los derechos humanos, considerado como uno de los pensadores más influyentes y originales del siglo XX.

La filosofía está escrita en este vasto libro que continuamente se abre ante nuestros ojos (me refiero al universo), el cual sin embargo no se puede entender si antes no se ha aprendido a entender su lengua y a conocer el alfabeto en el que está escrito. Y está escrito en el lenguaje de las matemáticas, siendo sus caracteres triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin los cuales es humanamente imposible comprender una sola palabra; sin ellos, sólo se conseguirá vagar por un oscuro laberinto.

GALILEO GALILEI

La matemática es una ciencia en la que nunca se sabe de qué se habla, ni si lo que se dice es verdadero.

BERTRAND RUSSELL

Prólogo

Hoy se acepta que la matemática como ciencia se inicia con la primera demostración geométrica atribuida al filósofo griego Tales de Mileto y que, desde Pitágoras y Platón hasta bien entrado el siglo XX, en filósofos como Leibniz, Descartes, Frege, Russell, por citar solo algunos, la matemática y la filosofía han recorrido solidariamente juntas el camino de la construcción del conocimiento matemático. Ilustraremos esta unión con algunos ejemplos. La matemática griega creció dentro del paradigma lógico-filosófico que imperaba en la Grecia clásica y que desde Parménides atemporalizó el mundo: *el ser es, el no ser no es*. Tan fuerte fue la primacía del Ser que, ni aun desde vertientes tan disímiles como el idealismo de Platón o el realismo de Aristóteles, se pudo ni siquiera entrever la existencia de alguna forma de negatividad, en particular la posibilidad de que existieran números negativos y menos aún, números irracionales. Hasta Newton, en su *Arithmetica Universalis*, publicada en 1707, consideró a los números irracionales como meros símbolos que no tenían existencia independiente de las magnitudes del continuo geométrico. Paralelamente, la verdad de los enunciados matemáticos, específicamente los de la geometría euclidiana, se fundamentaba en la lógica deductiva creada por Aristóteles en perfecta armonía con la inmutabilidad del Ser. No es casual que, desaparecido el aristotelismo escolástico, en pleno Renacimiento, la geometría analítica y el cálculo infinitesimal hayan sido creados por Descartes y Leibniz, eximios representantes del racionalismo de la filosofía moderna. Tampoco es casual que, a fines del siglo XIX, se hayan instalado en el seno de la matemática los problemas relacionados con la fundamentación del conocimiento matemático y el rigor de sus demostraciones, y que, en ese contexto, mientras Cantor introducía un paraíso poblado de infinitos conjuntos a su vez infinitos que, al decir de Hilbert, los matemáticos aún hoy se resisten a abandonar, otros matemáticos, como Brouwer y Heyting, apelando a la intuición, en contra de Frege y Russell, defendieran la primacía de los números naturales y las pruebas constructivas frente a las demostraciones de la teoría de conjuntos basadas en la lógica.

Sin embargo, teniendo en cuenta, por un lado, la intrincada relación entre filosofía y matemática que evidencia la historia y, por el otro, la complejidad de la matemática actual y la multiplicidad de escuelas filosóficas, no es tarea sencilla ni para los estudiosos de la filosofía acceder al conocimiento matemático ni para los matemáticos reflexionar filosóficamente sobre sus objetos de estudio. Desde la década de los cincuenta, el lector experto en esta temática dispone de

excelentes compilaciones de trabajos de los principales filósofos de la matemática y de una apreciable cantidad de importantes obras dedicadas específicamente a la filosofía de la matemática, con especial énfasis en la fundamentación de la misma, tales como *Introduction to Mathematical Philosophy* de Bertrand Russell, *The Foundations of Mathematics* de Evert Beth, *Introduction to the Foundations of Mathematics* de Raymond Wilder, entre otros, y que conforman rigurosas y deleitantes exposiciones de lo que se ha dado en llamar hoy en día enfoque *fundacionalista* de la filosofía de la matemática. Por el contrario, las obras sobre el tema publicadas en castellano son muy pocas y tal vez demasiado elementales. El presente libro aparece para llenar este enorme vacío y, simultáneamente, para permitir a sus lectores introducirse plácidamente en los intersticios filosóficos del conocimiento matemático, no en vano llamado por Whitehead "la creación más original del espíritu humano".

Después de responder a la pregunta sobre el porqué de este libro, los autores nos sumergen en los orígenes empíricos de la matemática y en los primeros filósofos de la matemática, Pitágoras y Platón. Dada su importancia en la construcción del conocimiento matemático occidental, el método demostrativo de Aristóteles, génesis de la axiomática moderna y la geometría de Euclides-Hilbert, son tratados en forma rigurosa y clara en capítulos independientes. Tal como era de esperar por la especialización de sus autores, éste es un libro que ensambla armónicamente los aspectos históricos con los conceptuales, lo cual se manifiesta claramente en el tratamiento que se hace del surgimiento de las geometrías no euclidianas en el capítulo 5. Luego se presentan tres capítulos de carácter sistemático dedicados al análisis de los sistemas axiomáticos formales, sus propiedades y requisitos, las geometrías no euclidianas como sistemas axiomáticos y la teoría de conjuntos como último eslabón construido a partir de la lógica clásica. En los capítulos 11 y 12 se retoman aspectos históricos a fin de mostrar el proceso constructivo de lo que se ha dado en llamar *aritmetización de la matemática* y que se analiza en dos etapas. La primera abarca desde la geometría analítica de Descartes hasta los números reales y la segunda se encarga de mostrar cómo llegar de los reales a los naturales y cómo éstos se definen constructivamente en la axiomática de Peano. Y es precisamente en este aspecto donde el libro nos muestra la inteligente peculiaridad de no presentar las distintas escuelas de filosofía de la matemática en forma independiente, tal como se las encuentra en la mayoría de esta clase de textos sino que, por el contrario, las introduce en función de los problemas matemáticos que las motivaron en forma esencial. Así, el neointuicionismo se desarrolla a partir de las discusiones mantenidas entre los matemáticos sobre la naturaleza de los números naturales y el carácter de la prueba matemática, y el logicismo, en tanto intento de reducir la matemática a la lógica, se presenta en el contexto de las antinomias lógi-

cas surgidas en la teoría de conjuntos. A continuación, se explicitan las distintas soluciones a las antinomias y, dentro de este marco, se analizan las propuestas axiomáticas, el formalismo de Hilbert y los metateoremas de Gödel y sus consecuencias filosóficas. Como colofón, los autores dedican el último capítulo a reflexionar acerca de problemáticas aún abiertas, tales como el tipo de conocimiento que proporciona la matemática, la relación entre matemática y realidad, el realismo matemático, privilegiando un cierto tipo de constructivismo matemático.

Cualquier lector avezado habrá comprendido que éste es un libro en el que se ha optado por el enfoque fundacionalista de la filosofía de la matemática y podría preguntarse si no se han construido en las últimas décadas del siglo XX otras perspectivas desde donde analizar esta disciplina. Por supuesto que las hay, pero, pese a que su temática está presente en varios capítulos del libro, en particular en el último, ellas no están tratadas en forma sistemática. La obra más representativa de estos nuevos aportes, la mayoría de ellos descendientes en alguna medida del programa sociologista de la ciencia, es la compilación de Thomas Tymoczko titulada *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, en cuya introducción se expresa claramente la decisión de desafiar al "dogma" del reduccionismo fundacionalista. La razón principal esgrimida consiste en denunciar que los filósofos clásicos de la matemática no han tenido en cuenta las distintas *prácticas* matemáticas, i.e., las pruebas informales, el desarrollo histórico, las comunicaciones entre matemáticos vía congresos o jornadas, las explicaciones computacionales, etc., esenciales al conocimiento matemático. Sin embargo, el lector comprobará en su lectura de la compilación mencionada que varios de los factores señalados como ausentes por la nueva filosofía de la matemática, han sido contemplados por los autores de este libro en el desarrollo de los temas en los capítulos no sistemáticos y, en particular, en las reflexiones finales, tal como ya lo señalamos anteriormente.

Por nuestra parte, reconocemos que indagar en la práctica matemática y los diversos tipos de razonamiento, herramientas e instrumentos inferenciales usados por los matemáticos agudiza el conocimiento de esta ciencia, y que recorrer los complicados vericuetos de su historia y su génesis histórica y contextualización social constituye una aventura apasionante que completa el abordaje del conocimiento matemático. Pero también creemos que profundizar en estas indagaciones, lejos de apartarnos de las preguntas tradicionales sobre la naturaleza de este conocimiento, más bien nos muestran con diáfana claridad que toda la actividad de los matemáticos y los resultados obtenidos están signados por la necesidad de que ellos constituyan verdades universalmente justificadas. Más aún, entendemos que la problemática filosófica acerca de la naturaleza del conocimiento matemático está en la base misma de la práctica matemática que los nuevos filósofos proponen profundizar.

En efecto, en los trabajos actuales sobre filosofía de la matemática, se acentúa específicamente el carácter no apodíctico del conocimiento matemático, o sea, la posibilidad del error matemático, el cual, si se lo acepta, hace de la matemática una ciencia casi empírica. En uno de los artículos de la compilación citada, se afirma que los matemáticos se equivocan, y como ejemplo se citan los *Proceedings of the American Mathematical Society* de 1963, en donde apareció un artículo titulado "False lemmas in Herbrand" y en el cual los autores, además de mostrar la falsedad de tales lemas, los reemplazan por otros que prueban como correctos. Pero, a los efectos de mostrar la debilidad de esta argumentación en contra de la fiabilidad del conocimiento matemático, podríamos preguntarnos ahora: si se abandona la pregunta sobre cómo se justifica el conocimiento matemático y nos dedicamos a describir las distintas prácticas de los matemáticos, ¿cómo sabemos si los nuevos lemas que se proponen en lugar de los falsos han devenido en correctos? Del hecho de que los matemáticos cometan errores en su práctica de investigación no se sigue válidamente que la matemática sea una ciencia casi empírica. Pero dudar de la fiabilidad del conocimiento matemático implica dudar también de la deducción como la más segura herramienta del razonamiento humano.

Conozco a los autores desde hace muchos años. La lectura de varios temas de este libro me ha traído a la memoria las magistrales clases de Gregorio Klimovsky allá por los años 70 sobre lógica y fundamentación de la matemática impartidas en la Universidad Nacional de La Plata, cuyas desgrabaciones he guardado sigilosamente, he releído miles de veces y me han servido de guía rectora cada vez que he tenido que hablar sobre estos temas. En ciertos fragmentos del libro he encontrado también comentarios u observaciones que me han remitido a los precisos, reflexivos e inteligentes aportes que seguramente habrá realizado Guillermo Boido, valiosísimo compañero de tareas intelectuales. En suma, hubiera querido disponer de este libro cuando era estudiante.

Gladys Palau
Profesora titular de lógica
Universidad de Buenos Aires
Universidad Nacional de La Plata

Asombro y conocimiento

Gregorio Klimovsky

Para Aristóteles, una de las características de la actitud filosófica es el asombro. Puede que, por razones prácticas, se reúna con frecuencia conocimiento que tendrá utilidad instrumental. Pero cuando el conocimiento se asocia con el asombro que produce el hecho de que la realidad sea como es, enorme, fantástica y emocionante, entonces el conocimiento origina en el investigador una visión filosófica del universo. Debo confesar que en uno (o tal vez varios) períodos de mi vida lo descrito anteriormente es precisamente lo que me sucedió. Reiteradamente tuve la sensación de estar ante maravillas, como cuando, por caso, supe que la galaxia en la que está situado el sistema solar, nuestra Galaxia, tiene unos cien mil años luz de diámetro y que está constituida por cientos de miles de millones de estrellas, entre las cuales el Sol es realmente un componente pequeño y aislado. Pero a su vez, enterarme de que en la parte del universo accesible para nuestros instrumentos astronómicos se cuentan varios cientos de miles de millones de galaxias resultaba ya demasiado para mi propia capacidad emocional. Todo ello me asombró pero además, como advierte Aristóteles, me asombró mi asombro, con lo cual estaba dando evidencias de un fuerte interés filosófico por este increíble universo en el que existimos. Esto explica que gran parte de los esfuerzos en mis estudios y actividades académicas hayan avanzado en dirección epistemológica, tratando de fundamentar cómo somos capaces los seres humanos de conocer tales cosas.

Posteriormente otra experiencia sorprendente vino a complicar mi vocación filosófica y mi capacidad de asombro. Me encontré con la matemática, o tal vez la matemática me encontró a mí, y con lo que a primera vista parecía un peculiar universo de entidades nítidas, perfectas y eternas (números, figuras, ecuaciones, conjuntos). Me fascinó también que el estudio de semejantes entidades estuviera asociado a una metodología para mí sorprendente: postulados, demostraciones y teoremas. Creo que el impacto intelectual que ello me produjo fue todavía mayor que el anterior y quizás por tal razón, desde entonces, quedé subyugado por ese extraño misterio que es el saber matemático. Uno de los motivos por el cual mi entusiasmo superó al que me habían provocado ciencias como la física o la astronomía fue que éstas mostraban la existencia de un universo muy grande, en tanto que entre las hazañas de la matemática se contaba el haber introducido una suerte de "universo infinito", el cual, si bien en la concepción "pura" de dicha ciencia podía semejar un mero juego, resultaba indispensable, a través de sus aplicaciones, para el desarrollo de otras ciencias y de la tecnología.

Como respecto de las emociones filosóficas y científicas no padezco de ninguna forma de egoísmo, siempre he querido compartir mi asombro divulgando y discutiendo estos temas entre amigos, alumnos y también, en seminarios, entre mis colegas. Pero todo se complicó a medida que fui percibiendo, como advertirá el lector de este libro, que había en la matemática y en su fundamentación serias dificultades y que, al menos parcialmente, podía hablarse de una "crisis" de esta ciencia. Ello me llevó a inquirir qué soluciones se habían propuesto para tales dificultades y entonces comprobé que, incluso en la actualidad, aparecen constantemente nuevas opiniones y puntos de vista sobre la naturaleza de la matemática desde una perspectiva filosófica. Me pareció entonces que, por un lado, los estudiosos de la filosofía, y por otro, parte de los propios cultivadores y docentes de la disciplina, debían conocer las controversias principales que a propósito del tema habían sido planteadas en el siglo pasado. Esto explica por qué dediqué tantos años, en variadas universidades, y en diversas facultades de ciencias y de filosofía, al dictado de cursos y seminarios vinculados con la fundamentación y la filosofía de la matemática.

Aún ahora estos temas, ya algo tradicionales, me siguen preocupando, y esto me llevó, de común acuerdo con mi colega Guillermo Boido, a la idea de que resultaría útil redactar un texto elemental en el que los problemas de esta esfera del conocimiento se brindaran como información de interés no solamente para universitarios o académicos sino también para todos aquellos que conciben a la ciencia como una manifestación medular de la cultura humana. Lo cual nos condujo a ambos a organizar un seminario, de carácter muy privado, en el que tratamos de rescatar ordenadamente esta temática y exponer y valorar, en la medida de lo posible, algunas de las posiciones clásicas de la filosofía de la matemática. De allí surgió este texto, que recoge nuestras discusiones con la esperanza de que el entusiasmo y el asombro ante esta aventura del pensamiento, compartidos por ambos autores, pueda contagiarse a muchos lectores: docentes, investigadores y estudiosos en general.

Sobre la socialización del conocimiento

Guillermo Boido

Citado de memoria, decía Einstein que era preferible que la humanidad desapareciera por una decisión errónea de la sociedad en su conjunto y no por la de un grupo de especialistas. El conocimiento generado por científicos y tecnólogos debe ser compartido con la mayor cantidad posible de sectores sociales. Sólo así será factible crear un espacio de reflexión crítica para el análisis colectivo y multidisciplinario de las dimensiones políticas, culturales y éticosociales de la ciencia y de sus aplicaciones. Ellas no pueden ser patrimonio exclusivo de quienes las producen ni tampoco de los reducidos ámbitos políticos y económicos que hoy deciden la utilización de tales conocimientos exclusivamente en términos de sus propios intereses y en detrimento de las necesidades de la gran mayoría de la población. Por ello es imprescindible concebir una nueva educación que permita niveles adecuados de comprensión, por parte de los no especialistas, de los contenidos, métodos y alcances de los desarrollos científicos y tecnológicos. Este libro, en la medida de lo posible, pretende contribuir a esa finalidad a propósito de los problemas de la fundamentación y la filosofía de la que alguna vez ha sido llamada la "reina de las ciencias", la matemática. Como el lector comprobará, a la vez que ella presta, en calidad de ciencia aplicada, innumerables servicios a otras ciencias, naturales y sociales, y también a la práctica tecnológica, su majestad no está libre de amenazas filosóficas.

Bien sabemos que existen científicos para quienes su interés radica exclusivamente en investigar en su ámbito específico, en el dominio interno de su comunidad profesional, y a quienes la docencia y la divulgación del conocimiento les resulta un desagradable compromiso: la vida es breve y la investigación demanda tiempo. Ante su obra, el público no especializado se enfrenta a lo que Pierre Thuillier llamaba la "vidriera de la ciencia": para muchos, sólo se la puede contemplar, y son muy pocos quienes la pueden comprender. Afortunadamente, en la comunidad científica argentina hubo y hay excepciones: entre otras, la de Gregorio Klimovsky. En ejercicio de un magisterio de innumerables matices, en cátedras, clases, conferencias, escritos (muchos de ellos de corte académico pero otros accesibles a un vasto público), proyectos educativos y científicos, e incluso en el terreno de los derechos humanos, ha comprometido su credo humanista con un protagonismo social orientado a extender sin límites su concepción de una cultura sin fronteras, viva y democrática, que en modo alguno puede prescindir de la ciencia. La redacción de este libro, que tal maestro de la cultura argentina ha tenido la deferencia de compartir conmigo, ha significado para mí una de las experiencias más enriquecedoras de las que tenga memoria.

Reconocimiento

Los autores expresan su agradecimiento a los miembros del equipo de producción de a•Z editora que han participado en la edición de este libro, en particular a Linda Alcazaba, Heber Cardoso y Alberto Onna, por la eficacia, la solicitud y el afecto que han puesto de manifiesto a la hora de realizar su compleja tarea.

El porqué de este libro

¿Por qué la matemática?

Quizás sea pertinente preguntarse, cuando se inicia la redacción de un libro de esta naturaleza, cuál es el interés que podría despertar el tema, es decir, el ocuparse del estudio de la fundamentación y de la filosofía de la matemática[1]. Si se tratase de un libro de biología, comprenderíamos que estamos estudiando el importante problema de la vida y también el de sus aplicaciones a la medicina, cuestión que tiene una trascendencia social innegable. Lo mismo ocurriría ante un libro de sociología, porque comprender la sociedad es comprender mucho de aquello que, de una manera muy pronunciada, nos afecta en la vida cotidiana, personal y comunitaria. Con la matemática suele ocurrir, por el contrario, que se piensa en ella como algo muy abstracto y alejado de la realidad, y que sólo de manera incidental tiene aplicaciones útiles en la vida diaria, como cuando pensamos en la aritmética elemental necesaria para realizar cómputos vinculados, por caso, con transacciones comerciales o bancarias. Es verdad que ámbitos importantes de la matemática se estudian más bien por su belleza y por la curiosidad intelectual que despiertan antes que por la posibilidad de que se las emplee para satisfacer requerimientos concretos de utilización práctica. Sin embargo, hemos de comprobar en este libro que la matemática, a través de sus aplicaciones, sirve para resolver problemas en una amplia gama de cuestiones que atañen a otras disciplinas, científicas y tecnológicas.

Hay que recordar aquí una afirmación de Galileo que parece reflejar con exactitud cuál es la importancia de la matemática para el conocimiento científico en general: el lenguaje para comprender la realidad es el lenguaje matemático. El libro de la naturaleza, nos dice el gran físico italiano, está escrito en caracteres matemáticos; sin ellos "es humanamente imposible comprender una sola palabra y sólo se conseguirá vagar por un oscuro laberinto". A propósito de ciencias como la física, la química, parte de la biología, la economía o la sociología,

1 En virtud de la unidad metodológica actual de esta disciplina, nos referiremos a ella como "matemática", en singular. Pero no es incorrecto emplear "matemáticas" con relación a sus distintas ramas: la geometría euclideana, la teoría de los números, las álgebras abstractas, la topología, etcétera.

las llamadas ciencias *fácticas*[2], no podrían entenderse las leyes y correlaciones que existen en la realidad natural y social (y en rigor ni siquiera podrían ser establecidas) si no se dispusiera de formulismos matemáticos para expresarlas. En este sentido, la matemática es la llave que abre las puertas de la realidad. Por otra parte, aunque se adopte una actitud favorable hacia la matemática, hay muchos malentendidos a propósito de ella, en particular cuando se la piensa como una suerte de "ciencia de la cantidad", aplicada a la aritmética y al álgebra, o bien como el estudio de extensiones y figuras espaciales, cuando se manifiesta como geometría. Este modo de concebir la matemática remite de inmediato a pensar en algoritmos numéricos, fórmulas, ecuaciones, propiedades de figuras y teoremas que, a su vez, en muchos casos, evocan estudios pronunciadamente enojosos para quienes no tienen vocación por la disciplina.

Pero esta caracterización de la matemática no es correcta. Tal como hoy se la concibe, la matemática pone su atención en lo que llamamos *estructuras*, o sea, conjuntos de elementos relacionados de determinada manera, y el estudio del matemático remite al de las propiedades que tienen tales conjuntos. Sin embargo, no puede decirse simplemente que la matemática estudia estructuras, ya que, por ejemplo, el físico también lo hace. ¿Cuál es la diferencia? El físico quiere conocer cuáles son las estructuras *reales*, es decir, cuáles son los conjuntos y relaciones que caracterizan a las familias de entidades existentes a las cuales dirige su atención; el matemático más bien estudia, como también lo hace el lógico, estructuras posibles, es decir, aquellas que no son contradictorias. Por lo cual podríamos, quizás temerariamente, caracterizar a la matemática como el estudio de todas las estructuras *posibles* y de sus propiedades: el matemático construye algo así como un gigantesco anaquel o armario en el que están almacenadas todas las estructuras que podamos concebir, una curiosa forma, si se quiere, de crear ciencia ficción.

Hablar de estructuras matemáticas, por supuesto, pone el centro de gravedad más en aspectos lógicos que en aspectos cuantitativos. Sin embargo, estaríamos engañando al lector si no reconociéramos que gran parte de las estructuras que pueden servir a los físicos, biólogos o economistas son estructuras numéricas y entre ellas se encuentran las más exitosas, útiles y complicadas que la matemática puede ofrecer. Pero no nos atreveríamos, como sí han hecho otros epistemólogos, a caracterizar la matemática fundamentalmente como una ciencia de la manipulación del número, de la cantidad o de los algoritmos numéricos. La matemática que hemos caracterizado como estructuralista posee, en la actualidad, por su desarrollo en el siglo XX, capítulos muy importantes en los cuales el número no es lo esencial y no aparecen las cantidades. A modo de

2 Esta denominación proviene de la circunstancia de que, como se dice frecuentemente, ellas se ocupan de *hechos*, y de allí la denominación de "fácticas". ¿Será la matemática también una ciencia fáctica? Aclarar este punto será uno de los tema centrales de nuestro libro.

ejemplo, podríamos citar la topología, una forma de geometría en que la cantidad no desempeña prácticamente papel esencial alguno, o bien el álgebra abstracta, una de las disciplinas desarrolladas a lo largo del siglo pasado, que no es una disciplina numérica sino que estudia todas las estructuras posibles donde es permisible la noción de algoritmo.

Imaginar tales estructuras y analizar sus propiedades pone en juego nuestra capacidad racional, aunque cabe preguntarse si esta actividad será similar a un juego o a un deporte, o bien pretenderá satisfacer las necesidades reales de otras ciencias. Ambas respuestas son posibles, pero en el segundo caso podríamos concebir una visita del físico o del economista al museo de la matemática para examinar las allí presentes estructuras posibles y decidir si alguna de ellas le resulta de utilidad para su tarea específica. El físico podría descubrir, por ejemplo, que las partículas elementales que estudia se vinculan de un modo semejante al que describe esta o aquella estructura matemática. Adoptados por el físico, los caracteres de un lenguaje matemático se convierten en páginas del libro de la naturaleza. En cierto modo, podríamos pensar en el matemático como adelantándose a los científicos que estudian la realidad, natural o social, y ello les es conveniente a éstos porque, cuando adoptan determinada estructura para sus propios fines, hacen lo propio con todo el estudio que de ella ha hecho previamente el matemático: sus propiedades o su vinculación con estructuras afines.

No puede desdeñarse una importante motivación intelectual y estética que muchas veces se halla presente en el estudio de la matemática, acerca de lo cual el matemático alemán Carl Gustav Jacobi, a principios del siglo XIX, ante la pregunta de por qué se consagraba a dicha disciplina, respondió: *por el honor del espíritu humano*. Cierto es que Jacobi polemizaba en ese momento con otro gran matemático, el francés Joseph Fourier, para quien la matemática debía ser una herramienta al servicio de la explicación de los fenómenos naturales e incluso de la "utilidad pública", pero la respuesta de Jacobi es perfectamente legítima. Se trata, quizás, de una cuestión de "temperamento matemático". Así como el ser humano se dedica a la plástica, a la poesía o a la música, que no pueden ser evaluadas en términos de "utilidad" sino de criterios estéticos, quien tenga vocación por la matemática puede encontrar en ella un grado tal de belleza que no es fácilmente superable por otras aventuras de la expresión humana. La capacidad creativa del matemático para imaginar estructuras tiene muchas analogías con la construcción de estructuras pictóricas, poéticas o musicales por parte de los artistas, por lo cual en este punto hay mucho más en común entre científicos y artistas de lo que habitualmente se cree. Concebida la matemática de este modo, es sugestiva la afirmación de Jorge Luis Borges: "La imaginación y la matemática no se contraponen; se complementan como la cerradura y la llave" y que, "como la música, [la matemática] puede prescindir del universo".

Desde luego, hay que reconocer que la matemática es importante también por otras razones. Se trata de sus aplicaciones, ya que en ámbitos tales como la economía o la ingeniería, en cuestiones donde realmente la ciencia aplicada requiere de un lenguaje numérico especial, o bien para formular leyes naturales, la matemática es un instrumento indispensable para poder solucionar problemas científicos y prácticos. Pero ambas perspectivas sobre la matemática son igualmente válidas. Ello nos recuerda que el matemático, historiador de la matemática y escritor de ciencia ficción Eric Temple Bell (1883-1960), luego de celebrar la belleza de la disciplina, destacando que ella reinaba por su exactitud y por el rigor de su desarrollo sobre todas las demás ciencias, tuvo que reconocer que era también un instrumento al servicio de muchos otros campos científicos y tecnológicos, por lo cual escribió un libro titulado *La matemática, reina y sirvienta de las ciencias*. Lo cual refuerza nuestra afirmación de que debemos concebir a la matemática, legítimamente, desde ambos puntos de vista.

A propósito de ello, debemos agregar lo siguiente: los matemáticos imaginan a veces ciertas estructuras que en principio no parecen tener ninguna aplicación al estudio de la realidad, pero luego, súbitamente, resulta que no es así. Un ejemplo impresionante, que analizaremos en este libro, es el de las geometrías no euclideanas[3]. Fueron desarrolladas en el siglo XIX de un modo un tanto especulativo, en una época en que se consideraba que la "verdadera" geometría, la que describe las propiedades del espacio físico, era la tradicional y venerable geometría de Euclides, que aun hoy, convenientemente adaptada, forma parte de los manuales escolares. Pero a principios del siglo XX, a partir de las investigaciones de Albert Einstein y de otros físicos, se descubrió que, para la física actual, al menos para la cosmología y también para la física de partículas, podía ser mucho más útil y apropiada la utilización de geometrías no euclideanas: para la relatividad general einsteniana, por caso, el universo *no es* euclideano. Desde luego, ello no significó abandonar la vieja geometría de Euclides para la descripción de las propiedades del espacio físico en el ámbito de los fenómenos cotidianos, es decir, para el mundo del "nivel medio humano" (alejado a la vez del macro y del microcosmos) en el que se desarrollan disciplinas técnicas como la ingeniería, la agrimensura y la arquitectura.

Resumiendo estas consideraciones, podríamos decir que quienes desean comprender la naturaleza y la sociedad, pero también saber cómo se puede actuar sobre ellas, para modificarlas, no puede prescindir de la matemática. Por lo cual, tanto desde un punto de vista filosófico, cognoscitivo y lógico pero también estético y tecnológico, la discusión sobre esas extrañas entidades llamadas estruc-

3 Pese a que la Real Academia Española acepta como grafía correcta "euclidiana", tal como aparece en el prólogo de la Dra. Palau, los autores han decidido emplear la palabra "euclideana" porque, a su juicio, expresa mejor la atribución de esta geometría al célebre geómetra Euclides.

turas y en general los resultados de la matemática como ciencia abstracta y aplicada, es asunto que la civilización contemporánea no puede desechar. Aunque ciertos intelectuales o humanistas tradicionales puedan tener dudas ante esta afirmación, es necesario entender que la matemática es un aspecto del pensamiento que, si no lo poseemos, nos llevará a una visión mutilada de la cultura humana.

¿Por qué la fundamentación de la matemática?

Se comprende, luego de la apología que hemos hecho de la matemática y de su papel a la vez científico, estético, lúdico y tecnológico, que cabe hacerse la pregunta acerca de *por qué hay que creer* en lo que se sostiene en esta disciplina, pues bien podría acontecer, como ha ocurrido muchas veces en la historia de la cultura, que las razones de tal creencia se fundasen meramente en ideologías o tradiciones acríticas establecidas. La historia de la ciencia nos muestra que ciertas teorías científicas han sido admitidas en determinados momentos como si se tratase de algo incontestable y que por tanto, en el caso de algunas de ellas, deberían guiar nuestra conducta o ser aplicadas con propósitos terapéuticos. Un ejemplo nos lo ofrece el mesmerismo, la teoría biomédica basada en la existencia de un "magnetismo animal", propuesta hacia 1772 por el médico austriaco Franz Anton Mesmer. Hoy en día dicha teoría, al menos en su formulación original, ha sido abandonada, pero tuvo en su momento una gran influencia sobre vastos sectores de la medicina y era considerada fundamental para orientar las acciones humanas u ofrecer terapias para diversas enfermedades. De allí que podríamos preguntarnos: ¿no ocurrirá algo similar con la matemática? La cuestión podría formularse también de otro modo, si se adoptan los puntos de vista de ciertos filósofos y sociólogos de la ciencia contemporáneos: quizá los matemáticos y otros científicos, independientemente de la validez o invalidez de sus investigaciones, han constituido una suerte de secta con mucho prestigio, lo cual les otorga cierta ventaja sobre otros sectores culturales, en particular a la hora de solicitar y recibir partidas presupuestarias. Por todo ello, si queremos adoptar una actitud racional, debemos dar algunas razones acerca de por qué hay que creer en las afirmaciones de la matemática o por qué es necesario considerarla como un instrumento indispensable para el desarrollo de otras ciencias.

Esta tarea, denominada *fundamentación de la matemática*, se ha transformado en una disciplina a su propio derecho, aunque quizás en parte se la pueda considerar como un capítulo de la epistemología. Al fin de cuentas, en su versión más estrecha, la epistemología se formula el mismo tipo de preguntas para la ciencia por entero. Pero la fundamentación de la matemática ha demostrado ser una especialización nada simple para cuyo ejercicio es necesario conocer, amén de la propia matemática, cuestiones de lógica y de filosofía, pero también

de historia de la ciencia, y esto último para comprender cómo se han construido a lo largo del tiempo las estructuras que finalmente han venido a constituir la matemática actual.

En el pasado, la matemática se ha presentado muchas veces como ejemplo a seguir para la conformación de otras ciencias. La posición de Aristóteles acerca de la estructura metodológica de la ciencia en general está inspirada sin duda en la matemática griega de su época; a la inversa, otros historiadores han sostenido que la geometría que se expone en los *Elementos* de Euclides es una suerte de aplicación a la matemática de las ideas metodológicas de Aristóteles. Debemos discutir entonces, por caso, si el método implícito en la geometría de Euclides, paradigma de la matemática antigua, se puede aplicar a las otras ciencias o incluso a la filosofía, algo en lo que creía por ejemplo el filósofo holandés Baruj Spinoza cuando escribió su notable libro *Ética* (1677). Por consiguiente, cuando nos ocupamos de la fundamentación de la matemática lo hacemos también, un tanto paradójicamente, del siguiente problema: ¿las demás ciencias tienen o no que asumir una propuesta metodológica similar? Diferenciar la matemática de las ciencias fácticas, si es que ello corresponde, es tarea que atañe a la fundamentación de la matemática, asunto que discutiremos más adelante en detalle.

No parece inoportuno formular, desde ya, una aclaración lingüística a propósito de la palabra "teoría", que hallaremos tanto en el campo de la matemática como en el de las ciencias fácticas. Ella tiene una considerable variedad de significados; de allí que a veces se habla de "teorías filosóficas" y otras de "teorías científicas". En la vida cotidiana la usamos para opinar sobre cuál será el comportamiento de alguien en determinadas circunstancias, como cuando afirmamos "mi teoría es que Juancito es un cobarde". Pero, en materia científica, y en un sentido muy general, una teoría es un conjunto de afirmaciones sobre ciertas entidades o ciertos hechos, aserciones vinculadas entre sí por relaciones lógicas que permiten *deducir* determinadas afirmaciones a partir de otras por medio de razonamientos. Un sentido algo más ceñido se refiere al uso de "teoría" en el ámbito de las ciencias fácticas. Es usual, en este campo, emplear hipótesis o conjeturas, por lo cual una teoría suele ser un conjunto de hipótesis "de partida" y *además* todas las consecuencias lógicas que puedan extraerse de ellas. No obstante, también en matemática se usa la palabra "teoría" pero en el sentido general antes aludido. Así, por ejemplo, Elliott Mendelson, en su libro *Introducción a la lógica matemática*, emplea esta palabra en el mismo sentido que en este libro corresponderá a la noción de *sistema axiomático*. Hagamos notar, además, que algunos capítulos notables de la matemática contemporánea se caracterizan también con esta palabra; por ejemplo, cuando se habla de la célebre "teoría de conjuntos".

Fundamentación y filosofía de la matemática

Hemos hablado de la fundamentación de la matemática, pero el título de este libro remite a su *filosofía*. Cuando los matemáticos se vieron obligados a fundamentar su disciplina, hicieron su irrupción las cuestiones filosóficas inherentes a la naturaleza de la misma y en particular a las características del conocimiento que ofrece. Dicho de otro modo, fundamentar la matemática pone en evidencia la consideración de importantes problemas filosóficos a propósito de ella. Y como ha ocurrido habitualmente en la historia de la filosofía, las respuestas que se han ofrecido son divergentes. Por ello tendremos que analizar las diversas controversias suscitadas en torno de la noción de "conocimiento matemático". ¿En qué consiste? ¿Acerca de qué trata? ¿Cómo se puede acceder a él? ¿Cómo se lo puede justificar? ¿De qué manera se lo puede ampliar? Preguntas que, como se advierte, son estrictamente filosóficas. Pero si los problemas filosóficos de la matemática emergen a partir de la necesidad de su fundamentación, debemos ofrecer a la vez nociones de fundamentación y de filosofía de la disciplina. No las abordaremos de manera sistemática y con pretensiones de completitud. Confiamos en que el lector, con la asistencia de la bibliografía que ofrecemos en las páginas finales de este libro, adquiera la suficiente motivación como para ingresar con profundidad en los múltiples, complejos y fascinantes universos filosóficos que convoca la matemática, una de las creaciones más elevadas que puede ofrecer la historia de la civilización.

Las concepciones de la matemática en el mundo antiguo 1: de Ahmés a Platón

Cuatro preguntas acerca de la matemática

Como punto de partida para comenzar nuestras reflexiones acerca de la matemática, adoptaremos como referencia cuatro preguntas medulares acerca de ella. Las preguntas se refieren a cuestiones estrechamente vinculadas las unas con las otras, pero a la vez remiten a problemas que son abordados de manera distinta por las diferentes escuelas o tendencias que nos ofrece la fundamentación y la filosofía de la matemática.

(1) *¿De qué hablan las proposiciones de la matemática?* Se trata, como se advierte, de una pregunta de carácter *ontológico*, pues remite a la cuestión de cuáles son los objetos o entidades que estudia la disciplina[1].

(2) *¿Por qué creer en las proposiciones de la matemática?* Esta pregunta se vincula con el problema de cómo fundamentar el conocimiento matemático, es decir, de cuál es la fuente de las verdades matemáticas, y por tanto es de carácter *epistemológico*.

(3) *¿Cómo se investiga en matemática?* Aquí nos preguntamos acerca de la estrategia que emplean los matemáticos para lograr nuevos conocimientos a partir de otros ya obtenidos, y la pregunta, entonces, se refiere a un aspecto *metodológico*.

(4) *¿Cuál es la relación entre la matemática y la realidad?* Estamos ahora en presencia de una pregunta de la mayor importancia filosófica, pero que atañe, además, al problema de la vinculación de los conocimientos matemáticos con necesidades y objetivos de orden *práctico*.

Como comprobaremos más adelante, será un tanto asombroso advertir la diversidad de opiniones en materia de respuestas. Una de ellas afirmará, por caso, que los objetos de la matemática no son distintos de los objetos de la ciencia

1 La *ontología* remite a las entidades, objetos y hechos que estructuran la realidad, y debe diferenciarse de la *semiótica*, que se refiere a los signos y expresiones con que nos referimos a aquéllos.

fáctica y que, por tanto, la fuente de la creencia en la verdad de las proposiciones matemáticas no difiere de la que nos permite garantizar la verdad de las proposiciones de la física, la química o la biología. En el extremo opuesto, por el contrario, se nos dirá que existe una separación drástica entre los objetos matemáticos y aquéllos de los que se ocupa la ciencia fáctica, y en particular que hablar acerca de "verdades matemáticas" y "verdades fácticas" es referirse a nociones completamente diferenciadas. En este segundo caso, se nos presentará la dificultad de distinguir entre ambos tipos de ciencia, asunto del que, como ya señalamos, nos ocuparemos en su momento.

Trataremos de caracterizar ahora algunas de las respuestas que se han propuesto, con el correr de los siglos, a las cuatro preguntas que nos hemos formulado, para decidir cuáles son sus alcances y sus limitaciones. Ello nos obliga a remitirnos a la historia de la matemática, en la cual podemos distinguir una serie de etapas que, a propósito de nuestros objetivos, consideramos a continuación.

El empirismo primitivo: Ahmés y el papiro Rhind

No es sencillo responder la pregunta acerca de dónde y cuándo se originaron las primeras manifestaciones de la matemática, pero sí podemos afirmar que, anteriormente al surgimiento de la cultura griega, los pueblos mesopotámicos (que habitaron sucesivamente la fértil región comprendida entre los ríos Eufrates y Tigris) y los del valle del Nilo, los egipcios, disponían ya de importantes conocimientos acerca de la disciplina. Las primeras referencias escritas, en ambas civilizaciones, datan del tercer milenio a.C. Quizás sea oportuno señalar que a las culturas mesopotámicas se las llama genéricamente "babilónicas", lo cual es incorrecto pues el Imperio Babilónico propiamente dicho no se estableció hasta el siglo XVIII a.C. a partir de una civilización anterior, la de los sumerios, y que a partir del siglo XIII a.C. la región fue sucesivamente dominada por asirios, caldeos y persas. Destaquemos además que culturas tan antiguas como las de la Mesopotamia y de Egipto surgieron en China y la India, cuyo conocimiento matemático también fue significativo, pero su desarrollo científico fue independiente y no influyó sobre el de mesopotámicos y egipcios. Muchos siglos después, algunas ideas matemáticas provenientes de las culturas china e india fueron heredadas por los árabes, cuyo imperio se conformó en el siglo VII d.C., a través de los cuales dichos conocimientos llegaron luego a la Europa medieval.

La matemática surgió para la resolución de problemas prácticos, cotidianos, y en particular astronómicos, pues era necesario realizar observaciones astronómicas detalladas, por razones de culto, para elaborar calendarios, para orientarse en el mar o para predecir eventos de interés agrícola. También la administración de las cosechas, la organización de las tareas públicas o la recaudación de impuestos requerían de ciertos conocimientos aritméticos y geométricos. En

una tablilla de barro sumeria fechada aproximadamente hacia el año 2600 a.C., encontramos ya la solución de un problema geométrico relativamente complejo: calcular la longitud de la cuerda de un arco de una circunferencia conociendo su perímetro y la distancia entre el punto medio de la cuerda y la circunferencia. Durante el reinado del gran rey y legislador babilónico Hammurabi (1790-1750 a.C.) fueron redactados documentos aritméticos y geométricos que manifiestan un conocimiento notable, aunque meramente empírico, de la resolución de problemas matemáticos: por ejemplo, el cálculo de la superficie de un cuadrilátero cualquiera. Los babilonios emplearon, por otra parte, un complejo sistema de numeración decimal-sexagesimal heredado de los sumerios. La expresión de números naturales y fracciones en notación posicional (de base 60) fue uno de los logros más trascendentes de la matemática sumerio-babilónica, pues simplifica enormemente los cálculos aritméticos. (El lector puede comprobarlo si compara nuestro sistema posicional de base 10 con el sistema de numeración que empleaban los romanos y que aún hoy se utiliza, por ejemplo, en antiguos relojes.) Posteriormente, los babilonios desarrollaron técnicas que les permitieron hallar las raíces positivas de cualquier ecuación de segundo grado e incluso, en casos particulares, de tercer grado, amén de la suma de progresiones aritméticas y geométricas. En una tablilla se lee: "Un área, que consiste en la suma de las áreas de dos cuadrados, es igual a 1000. El lado de uno de los cuadrados equivale a restar 10 de los 2/3 del lado del otro. ¿Cuál es el lado de dicho cuadrado?" La respuesta, 30, proviene de hallar la raíz positiva de una ecuación de segundo grado[2]. En cuanto al hoy llamado "teorema de Pitágoras", era conocido en su total generalidad, es decir, aplicable a *cualquier* triángulo rectángulo.

En el caso de los egipcios, sus conocimientos matemáticos, aunque inferiores a los de sumerios y babilonios, se pueden apreciar en la aplicación de los mismos a las construcción de las grandes pirámides características de su civilización (la de Keops, que involucra en especial el uso de tales conocimientos, fue construida hacia 2800 a.C.). Pudieron resolver problemas relativamente complicados, como el cálculo del volumen de la pirámide truncada. Sin embargo, su sistema de numeración no les permitió ir más allá de la suma y la duplicación, a partir de lo cual lograban multiplicar y dividir. La expresión de las fracciones y su manipulación era sumamente engorrosa en particular porque, con la excepción de 2/3, sólo aceptaron fracciones de numerador *uno* (de la forma $1/n$) y así, por ejemplo, la fracción 2/7 debía ser expresada como 1/4 + 1/28. De este modo, fueron capaces de resolver problemas que involucran fracciones y algunos otros problemas algebraicos, incluyendo la resolución de ecuaciones

2 Algunos de estos problemas se formulaban empleando sumas o restas de longitudes y áreas, lo cual, en términos concretos, no son posibles de realizar. Ello ha llevado a pensar a algunos historiadores actuales que el propósito de tales interrogantes era meramente lúdicro y que entre los babilonios existiría ya un atisbo del número como entidad *abstracta*.

de primer grado. La incógnita era llamada *aha*, y por ello al álgebra egipcia se la suele llamar "álgebra *aha*". En geometría hallaron las fórmulas para calcular el área de triángulos, rectángulos y trapecios, y el volumen de paralelepípedos rectos, cilindros y pirámides, siempre referidos concretamente, por caso, a terrenos o receptáculos para almacenar granos. Por otra parte, si bien no conocían el teorema de Pitágoras, sabían que un triángulo cuyos lados se hallan en la relación 3 : 4 : 5 es rectángulo, conocimiento que empleaban en la práctica (por medio de nudos intercalados en una cuerda) para obtener ángulos rectos.

Es oportuno tener en cuenta que Egipto atravesó períodos históricos muy distintos. Fue, en particular, un centro comercial en el que se intercambiaban mercaderías con pueblos vecinos y, además, como no parece haber existido moneda entre ellos y estas operaciones se realizaban por trueque, cada transacción conformaba un problema práctico de medición de volúmenes, pesos y otras cantidades. Por tanto, la matemática no constituía un mero lujo filosófico planteado por la natural curiosidad humana sino un instrumento necesario para realizar tales operaciones comerciales. No debemos olvidar, además, que el Nilo, en su crecida e inundación anual, borraba todas las huellas de límites entre terrenos y obligaba a los propietarios a contratar agrimensores, una profesión que debía ser floreciente, por lo cual, también aquí los problemas prácticos de mediciones de figuras geométricas o de cálculo de áreas se transformaban en exigencia y preocupación principal en ciertas épocas del año. A ello atribuye Heródoto, el gran historiador griego del siglo V a.C., el origen de la geometría entre los egipcios:

> [El faraón] Sesostris dividió las tierras de Egipto entre sus habitantes [...]. Si el río se llevaba una parte de la porción asignada a un hombre, el rey enviaba a otras personas para examinar y determinar, por medio de una medición, la extensión exacta de la pérdida [...]. A partir de esta práctica, creo yo, es como se llegó al conocimiento de la geometría en Egipto en primer lugar, de donde pasó más tarde a Grecia[3].

Para nuestros propósitos, sin entrar en los detalles del aporte egipcio a la matemática, es importante analizar los contenidos del papiro Rhind, un documento del siglo XVII a.C. descubierto en 1858 cuyo autor fue un escriba egipcio, Ahmés o Ahmose, quien lo redactó a partir de un documento anterior. Nos encontramos aquí con el nombre propio más antiguo que registra la historia de la matemática. En este documento, así como también en el llamado papiro de Moscú, de una antigüedad dos siglos mayor, encontramos en total 110 problemas de matemática. En ellos no se pretende probar nada; constituyen más bien compendios de resultados para ser utilizados en la práctica cuando era necesa-

3 Citado por Boyer, C. B., *Historia de la matemática*, Alianza, Madrid, 1986, p. 29.

rio efectuar cálculos o recordar propiedades geométricas. Examinando el papiro Rhind, que contiene 85 problemas, podemos dar cuenta de algunas características bastante curiosas acerca de la matemática egipcia. Por ejemplo, las reglas que ofrece Ahmés, por cuanto son de carácter concreto, nunca se refieren a números considerados en abstracto; no hay afirmaciones tales como "1200 más 800 es igual a 2000", sino otras del tipo "1200 soldados más 800 soldados son 2000 soldados" o bien "30 panes más 20 panes son 50 panes". De manera que, con respecto a los números, Ahmés alude a aspectos de conjuntos concretos, tangibles, reales, y muchas de sus reglas están así establecidas. Desde el punto de vista geométrico, ocurre exactamente lo mismo: se habla de figuras y cuerpos materiales, tales como terrenos o vasijas.

La geometría nació, así, por razones prácticas, como bien lo señala Heródoto. Las que hemos mencionado de seguro no son las únicas; por otra parte, es posible que la casta sacerdotal egipcia poseyera algún tipo de conocimiento reservado y un tanto esotérico que no se comunicaba a los técnicos y a los escribas, y que era propiedad de aquel sector particular de la población. Los historiadores de la matemática consideran como bastante probable que la matemática que dominaban los sacerdotes era más sistemática y orgánica que la que describe Ahmés. De todos modos, podemos advertir en las instrucciones que nos legó el escriba egipcio que no hay en ellas la menor concepción formalista o abstracta de los "objetos matemáticos", pues en los ejemplos que nos ofrece, reiteramos, se refiere a objetos concretos y a alguna de sus características aritméticas o geométricas. También es importante señalar que no hay aquí ninguna traza de justificación de la verdad de los enunciados que se proponen o de la resolución de los problemas que se plantean. Podemos suponer que el escriba condensaba una suerte de conocimiento práctico obtenido mediante procedimientos inductivos, es decir, al cabo de la observación de muchos casos similares. Un ejemplo que ya hemos citado es el conocimiento del que disponían los egipcios para trazar perpendiculares y construir triángulos rectángulos, por medio de sogas y nudos, para la división de los terrenos u otros fines similares.

De ser así, observemos lo siguiente: la primera de nuestras cuatro preguntas hubiera sido contestada por Ahmés diciendo que la matemática se ocupa de aspectos concretos de ciertos objetos igualmente concretos, y del mismo modo en que un objeto puede tener color y peso, también puede tener cantidad y forma. Al igual que un médico puede estudiar los síntomas de un paciente, un geómetra puede hacer lo propio con las cualidades geométricas de una mesa. En tal sentido, los objetos de los se ocuparía un matemático serían de naturaleza concreta y sus características obtenidas a través de la experiencia: de ellos hablan los enunciados de la matemática. Esta versión egipcia de la matemática puede considerarse, en cierto modo, como una posición *empirista*. De seguro, el conocimiento de las complicadas metodologías aritméticas o de las intrincadas y sabias estrategias geométricas que poseían los egipcios era el resultado inductivo

de una práctica antigua y continua en materia de construcciones, de topografía, de agrimensura y de otras actividades similares. Si hubiéramos preguntado a Ahmés cuáles son las razones por las cuales hay que creer en las proposiciones de la matemática, es decir, cuáles son las fuentes del conocimiento que proporciona, hubiera respondido: la observación y la inducción. Habría, en síntesis, que observar aspectos concretos de objetos concretos y luego generalizarlos mediante el uso continuo de la observación.

La tercera pregunta, acerca de cómo se investiga para obtener nuevos conocimientos matemáticos, sería respondida por Ahmés en concordancia con lo anterior, es decir: el investigador tendrá que realizar nuevas observaciones y generalizar lo que ha observado. Y en cuanto a nuestra cuarta pregunta, el escriba probablemente se sorprendería ante ella; diría que el estudio de la matemática es el de ciertos aspectos de la realidad, pues todo lo que se afirma en la disciplina es relativo a los objetos concretos y a lo que queremos hacer con ellos. Podemos suponer, además, que las respuestas de Ahmés a estas cuatro preguntas que nos hemos formulado, en aquella época, seguramente hubiesen sido contestadas de manera análoga por los matemáticos sumerios, babilónicos, caldeos y probablemente también persas.

Por todo ello, esta matemática de los antiguos egipcios (y la de otros pueblos que existieron antes de la aparición de la cultura griega) no advertía en los objetos matemáticos nada especial, puesto que éstos eran concebidos como de naturaleza empírica. Como hemos de comprobar luego, la posición de Aristóteles no habrá de ser muy diferente, si bien indicaremos, a propósito de este gran filósofo, una importante discrepancia acerca de las razones por la cual debemos creer que una proposición matemática es verdadera. En síntesis, para el empirismo primitivo, (1) los objetos matemáticos son de naturaleza concreta y empírica; y (2) las razones por las cuales se puede creer en la verdad o falsedad de las afirmaciones matemáticas son también de naturaleza empírica, admitiéndose la validez de la inducción. La matemática parece haber comenzado así. Y agreguemos, sin justificación por el momento, que en ciertos aspectos aquella concepción empirista aún tiene cierta vigencia. Lo que queremos destacar, en este punto, es que no hay en esta matemática prehelénica nada similar a lo que hoy llamaríamos una *teoría*, es decir un conjunto de enunciados coherentes y sistematizados acerca de ciertas entidades. Este pensamiento teórico será característico de toda la tradición que posteriormente habrá de dominar la escena, desde un punto de vista filosófico y epistemológico, en cuanto a la naturaleza de la matemática y de la ciencia en general.

Tales de Mileto: la aparición de la idealización límite y la lógica

Hacia fines del siglo VII a.C o comienzos del VI a.C., habrá de ocurrir un cambio revolucionario en la concepción de la ciencia. Surgen, en esa época, los primeros filósofos-científicos griegos. Con palabras del historiador argentino José Babini, se habrá de generar "un saber crítico, con pretensiones de objetividad, abstracto, consciente de su propia misión y del sentido de responsabilidad que le impone la exigencia de verificación". Se ha hablado en el pasado con frecuencia del "milagro griego" y sostenido que el conocimiento científico de los griegos fue totalmente original. Pero esta concepción es hoy insostenible. Los historiadores de la matemática, en particular, advierten actualmente una mayor continuidad entre el susodicho milagro griego y ciertas culturas anteriores. Nada de ello significa disminuir el talento de los científicos griegos, porque éstos supieron sacar partido de una manera extraordinaria de tal conocimiento heredado, particularmente de babilonios y egipcios. Por otra parte, el reconocimiento y admiración que manifiestan los autores griegos por estas culturas milenarias, y el hecho de que se les suela atribuir (como a Tales y a Pitágoras) el haber viajado a Egipto o la Mesopotamia con fines de aprendizaje, corrobora que los conocimientos matemáticos desarrollados por la civilización griega tuvieron firmes raíces en el de sus vecinos del Cercano Oriente.

La civilización helénica estaba ya establecida siglos antes del 600 a.C., época esta última en que comienza a desarrollarse la ciencia griega propiamente dicha. Hasta el siglo XI a.C., la historia griega comprende los llamados "tiempos heroicos", en los que hallamos numerosas fábulas y leyendas que narran las hazañas de héroes como Hércules o Edipo. A fines del siglo XII a.C. aconteció la guerra de Troya entre griegos y troyanos, que serviría luego de marco escénico para el desarrollo de los inmortales poemas homéricos, *La Illíada* y *La Odisea*, escritos probablemente entre los siglos IX a.C. y VIII a.C. y tradicionalmente atribuidos a Homero. En el siglo XI a.C., el pueblo dorio se estableció en el Peloponeso, a la vez que otros (jonios, aqueos y eolios) ocuparon parte de Italia, Galia, España y África, donde fundaron numerosas colonias. Los pequeños reinos de épocas anteriores dieron lugar a estados autónomos, con preponderancia del Ática, con Atenas como capital, y de Laconia, cuya capital fue Esparta. La rivalidad entre ambas por la hegemonía de Grecia habría de ser una constante de la historia griega subsiguiente.

En el siglo VII a.C. los griegos ocupaban no sólo la península que hoy conforma Grecia, sino también la costa del Asia Menor y regiones del sur de la península itálica, si bien carecían de unidad política y vivían en ciudades-estados independientes: Mileto, Samos, Esparta, Atenas. Precisamente en Jonia, en el Asia Menor, cuyos habitantes se hallaban en permanente contacto comercial con Egipto, Babilonia y Fenicia, surgieron las primeras manifestaciones de la

ciencia griega, que se desplazó luego hacia el sur de Italia. La matemática desempeñó, en los orígenes de esta nueva ciencia, un papel primordial. Así nos lo dice el historiador Dirk Struik:

> Los estudios de matemática de la Grecia temprana tuvieron un objetivo principal: el conocimiento del lugar del hombre en el universo de acuerdo con un esquema racional. La matemática ayudó a hallar orden en el caos, ordenar las ideas en secuencias lógicas, hallar principios fundamentales. Ella fue la más racional de todas las ciencias, y si bien no quedan dudas de que los mercaderes estaban familiarizados, a través de sus viajes, con la matemática oriental, pronto los griegos descubrieron que los orientales habían dejado de lado la racionalización. ¿Por qué el triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales? ¿Por qué el área de un triángulo es igual a la mitad de la de un rectángulo de igual base y altura? Estas cuestiones fueron formuladas naturalmente también por quienes investigaban asuntos similares concernientes a la cosmología, la biología y la física[4].

El jonio Tales de Mileto (c. 625 - c. 546 a.C.), mercader, filósofo y matemático, amén de incesante viajero, fue uno de los eslabones más importantes para la transmisión del conocimiento de los babilonios y egipcios a la cultura griega. Fue considerado el más notable de los llamados "siete sabios de Grecia" y era, quizás, de origen fenicio. Demostró, aunque no sabemos muy bien cómo, algunos resultados básicos de la geometría que posteriormente se reelaboraron de manera sistemática. A manera de ejemplo, podemos citar los siguientes: (a) el diámetro divide al círculo en dos partes iguales; (b) si dos rectas se cortan, los ángulos opuestos por el vértice son iguales; (c) el ángulo inscripto en una semicircunferencia es recto (una propiedad útil para la navegación). Se cree, aunque la narración puede ser legendaria, que durante un viaje a Egipto calculó la altura de una pirámide comparando la sombra de algunos de sus elementos con la sombra de una vara de longitud conocida. De ser así, Tales habría conocido la semejanza de triángulos y, probablemente, al menos en casos particulares como éste, también el célebre teorema que se le atribuye: "Si tres o más paralelas son cortadas por dos transversales, la razón de los segmentos determinados en una de ellas es igual a la razón de los segmentos correspondientes de la otra". Pero ello no puede ser afirmado con certeza. No disponemos de ningún escrito de Tales y ni siquiera sabemos si los redactó o no. La precariedad de los testimonios fidedignos disponibles no nos permite evaluar con precisión las contribuciones de esta suerte de "fundador de la geometría griega", pero su figura, un tanto legendaria, simboliza la aparición de la ciencia y la filosofía modernas en el marco de esta singular cultura.

4 Struik, D. J., *A Concise History of Mathematics,* New York, Dover, 1967, pp. 38-39.

Sin embargo, el haber expresado tales enunciados pierde importancia frente a las cuestiones epistemológicas que aparecen en el punto de vista implícito de Tales. En algún sentido Tales es todavía un heredero de las concepciones epistemológicas de los egipcios, pero aquí hay que hacer una distinción, pues al parecer fue el primero que añadió a los aspectos empíricos de la geometría otro de carácter teórico: concibió la noción de "punto" como *idea límite*. Esto significa que si tomamos volúmenes cada vez más pequeños en todas sus posibles dimensiones, ancho, largo y altura, las figuras tienden, no a "la nada", sino a algo especialmente pequeño: el punto geométrico. Se tiene la impresión de que Tales acepta que el lenguaje de la geometría, el que utilizamos habitualmente cuando formulamos proposiciones geométricas, está conformado por nociones que muy bien podemos denominar *nociones límite*: las que resultan de las entidades concretas a medida que éstas tienden a hacerse más limitadas en tamaño y al mismo tiempo más perfectas en su esencia. De ser así, éste sería el primer momento histórico en el que se piensa que cuando se habla de "la realidad" no solamente se tienen en cuenta sus elementos y propiedades *observables*, sino también aquellas nociones límites, que hoy incluiríamos entre las entidades *teóricas*, que son las *no observables*[5]. Por otra parte, al parecer con seguridad, Tales fue el primero en señalar la necesidad de organizar los enunciados matemáticos derivándolos unos de otros, paso a paso, en secuencias de razonamientos; dicho de otro modo, introdujo la exigencia de emplear procedimientos lógicos para obtener ciertas conclusiones a partir de afirmaciones previamente formuladas.

¿Cómo respondería Tales nuestras cuatro preguntas? Los objetos de los que se ocupa la matemática serían, por una parte, objetos empíricos, observables, pero por otra, con igual *status* de realidad, entidades límite no observables. En cuanto a las fuentes del conocimiento, sin duda Tales se halla todavía en una actitud empirista. Esta afirmación puede parecer sorprendente, ya que emplea términos teóricos cuando introduce nociones límite. Sin embargo, adviértase que, para "tender al límite", se necesitan datos sobre las propiedades de las entidades que aparecen en dicho proceso. Las mencionadas propiedades deben obtenerse por observación, de manera que parece inevitable reconocer que es necesaria una metodología empirista para constituir el proceso de obtención del límite. Pero Tales incorpora además una novedad muy importante, que después será llevada a su punto culminante por Aristóteles. Porque, como ya señalamos, no cree que el método para llegar a formalizar el conocimiento geométrico sea *únicamente* la observación junto con la inducción, sino que también pertenece a él la deducción lógica, que permite obtener nuevas verdades a partir de verdades ya aceptadas. Esta exigencia de sistematización jerárquica de las verdades matemáticas es un punto crucial en la historia de la ciencia, porque se

5 Adherimos a este punto a propósito de Tales con cierta reserva, pues algunos historiadores atribuyen a Pitágoras el haber introducido estas entidades no observables.

halla en el origen de una concepción metódica del conocimiento científico, que después de Tales utilizará medularmente procedimientos *lógicos* para fundamentar algunas de sus verdades. En lo que concierne a la pregunta acerca de cómo se investiga en matemática, a la respuesta de Ahmés deberíamos agregar que es necesario desarrollar la capacidad de imaginar entidades límite y también la aptitud lógica de razonar, algo que hasta el advenimiento de Tales no había aparecido en la historia de la matemática. Y respecto de la cuarta pregunta, nuestro filósofo la respondería diciendo que la matemática es el estudio de una parte de la realidad, es decir, el de aspectos concretos de entidades concretas, pero también de entidades límite, no observables, que derivan de las primeras.

Es difícil saber si las novedades que encontramos en Tales provinieron de su propia originalidad o bien si las adquirió en parte de las tradiciones egipcia y babilónica, dilema que los historiadores de la matemática no han logrado dilucidar. Pero cabe destacar que, con Tales, aparecen formuladas ya *reglas generales* para las propiedades que enuncia acerca de figuras geométricas. Además, la prueba atribuida a Tales del teorema que lleva su nombre mostraría que él ya sabía que el conocimiento geométrico puede relacionarse con otro conocimiento previo y que a veces la sustentación de una verdad puede no ser empírica sino *semirracional*, lo cual significa que se puede deducir a partir de determinada verdad empírica. (Sólo sería enteramente *racional* si la pudiéramos justificar *por sí misma*.) Lo que nos dice Tales es que se puede justificar una verdad geométrica si ya hemos aceptado otras que tienen fuentes empíricas, de modo que la geometría sigue siendo empírica como en el primitivo empirismo egipcio. Pese a ello, el *ingrediente racional hace su aparición*, lo cual no es poco decir. Esta posición sería del tipo epistemológico que corresponde a las ciencias fácticas, y aquí empieza a aparecer, en definitiva, la lógica, que de alguna manera, agazapada, advertimos en el pensamiento de Tales.

En síntesis, Tales nos dice que la fuente del conocimiento matemático radica en la experiencia, la cual permite, por inducción, llegar a las leyes generales de la matemática; pero que luego, por deducción lógica, se adquieren nuevas verdades como conclusiones de razonamientos cuyo punto de partida son aquellas verdades ya obtenidas. Por ello es que, con justa razón, muchos historiadores y epistemólogos homenajean a Tales afirmando que fue el precursor de una posición que, si bien no es por entero racionalista, sí lo es parcialmente en lo que concierne al papel que desempeña la lógica en la construcción del conocimiento científico.

Pitágoras y el intuicionismo dualista

Tales fue el primero de los llamados "filósofos jónicos", que incluye a Anaximandro y Anaxímenes, quienes vivieron en el siglo VI a.C. Pero la obra matemática de éstos carece de trascendencia. A fines de dicho siglo, los ejércitos del poderoso imperio persa, ante la debilidad de las aisladas ciudades-estado griegas, invadieron y conquistaron las ciudades jónicas del Asia Menor y luego la región de Tracia, al norte del Mar Egeo. De allí que Pitágoras (c. 582 - c. 500 a.C.), nacido en Samos, luego de viajar durante años por Egipto y la Mesopotamia (al menos así lo afirma la tradición), se estableció en el ámbito menos convulsionado de Crotona, en el sur de Italia, donde fundó una escuela de orientación mística, comunitaria y un tanto monástica, con un fuerte sesgo de carácter moral, cuyos miembros tenían el *status* de iniciados sometidos al juramento de no divulgar sus descubrimientos. Pero, al igual que en el caso de Tales, no disponemos de ninguna obra escrita de Pitágoras, y sólo conocemos su obra por referencias de discípulos o escritores posteriores, laudatorias o desaprobatorias. Hoy sabemos, además, que muchos de los descubrimientos que antiguamente se atribuían al maestro fueron en realidad realizados por sus alumnos y continuadores. Por ello ciertos historiadores prefieren hablar de la "escuela pitagórica" en lugar de referirse a su fundador. La cosmología pitagórica, por caso, fue en realidad concebida por Filolao, un pitagórico del siglo V a.C.

En Pitágoras se encuentra, de pronto, una completa originalidad. Bertrand Russell afirma con ingenio que este filósofo fue algo así como una suerte de composición del pensamiento de Albert Einstein con el de Mary Baker Eddy, la fundadora de la *Christian Science*, basada en la vida de Jesucristo. (Para Russell, obviamente, esta última doctrina era mera superstición.) De hecho, los méritos de Pitágoras en el desarrollo de la ciencia son sumamente importantes, y por ello podemos encontrar en *Los sonámbulos*, de Arthur Koestler, la rotunda afirmación de que el gran concierto de la ciencia se inició con una indicación de un primer director que desató todo el proceso y que fue precisamente Pitágoras, punto de vista que no compartimos. Ello no impide reconocer la relevancia de la obra de Pitágoras y su escuela, en particular porque a ella están vinculadas la confianza en la razón y la tradición racionalista en la ciencia. En este sentido, Pitágoras sería algo así como el primer racionalista de la historia de la filosofía de la matemática e incluso de la filosofía por entero.

Detengámonos por un momento en el significado del pensamiento de este filósofo, del cual hay en la actualidad una suerte de reivindicación sobre su importancia en la historia de la ciencia, haciendo abstracción de sus aspectos esotéricos y místicos. Para Pitágoras y su escuela, los objetos matemáticos *no son empíricos*, es decir, no se hallan en la realidad concreta ni son percibibles por los sentidos, sino que tienen una existencia de carácter *sui generis*. A Pitágoras se le atribuye la frase "los números constituyen la esencia del mundo", si bien

no está claro lo que se quiere decir con ello: ¿significa que el mundo se puede explicar con el auxilio de los números o que los números constituyen los ladrillos últimos con los que está edificado el universo? Posponiendo nuestra opinión al respecto, lo cierto es que para Pitágoras tanto los números como las figuras geométricas son entidades de carácter *no empírico*, o bien, como se diría en términos modernos, constituyen una ontología a pleno derecho "paralela" a la empírica propiamente dicha. Ésta es una novedad que importa señalar, porque el surgimiento del pensamiento pitagórico es el primer momento en la historia de la ciencia en que se piensa sistemáticamente que el conocimiento no se agota con el conocimiento de lo empírico: la realidad empírica, concreta, percibida por nuestros sentidos, es solamente una parte de *toda* la realidad. De tal modo, Pitágoras da respuesta a la primera pregunta que nos habíamos formulado: hay una realidad no empírica y a ella pertenecen los números y otros objetos matemáticos como las figuras de la geometría. Dicho de otra manera, si llamamos "primer mundo" al de los objetos y hechos empíricos, habría además un "segundo mundo" que lo trasciende, no empírico, poblado en particular por las entidades matemáticas. Obsérvese que la introducción de estas entidades por Pitágoras no se relaciona con tendencias al límite, como sucedía con Tales; en realidad, las nuevas entidades aparecen por su propio derecho, aparición respaldada por consideraciones enteramente racionales.

Con respecto a la segunda pregunta, comienza con Pitágoras una larga tradición según la cual sólo podemos conocer tales objetos del segundo mundo por medio de una metodología no empírica: ella justificaría la verdad de los enunciados matemáticos. Para el conocimiento de los objetos empíricos disponemos de los órganos de los sentidos; por el contrario, en lo que se refiere a los objetos matemáticos, el conocimiento de éstos provendría de la *intuición* de aquellos objetos abstractos o formales del segundo mundo, en cuyo caso sería la mente la encargada de obtenerlo. Este *intuicionismo dualista* es característico del pensamiento pitagórico. Aquí la palabra "intuición" se refiere a una clase de conocimiento inmediato obtenido por vía sensorial o bien racional (en este último caso se suele hablar de *intelección*). Es muy curioso que Pitágoras, a pesar de que está diciendo algo totalmente diferente de lo que afirmaban los primitivos egipcios, sostiene una posición similar en otro respecto. Porque señala que de todas maneras la matemática habla acerca de cierto tipo de *objetos*, aunque pertenezcan al segundo mundo, y lo que nosotros sabemos no es más que el fruto de "ver", con la mente, lo que ocurre con ellos. No se trata, pues, de generalizar inductivamente o recurrir a la razón demostrativa. Ésta es una posición que encontramos en los filósofos denominados *intuicionistas*, antiguos y modernos, por caso en la escuela del gran filósofo alemán Immanuel Kant. Cuando tenemos una certera intuición para las afirmaciones de la matemática, se nos dice, la demostración lógica no es esencial sino subsidiaria. La demostración, para los intuicionistas, es un instrumento que no ayuda a "captar" intui-

tiva y directamente lo que existe o lo que ocurre. La vía de los sentidos puede decirnos *cómo* acontecen las cosas en el ámbito de lo empírico, pero sólo una intuición directa y singular de la figura geométrica "círculo" o la figura geométrica "cuadrado" nos permite "ver" sus propiedades. Aquí no hay nada similar a la idea de generalización y ni siquiera a la de justificación por medio de una demostración lógica. Éste es probablemente uno de los aspectos más criticados del pitagorismo en la historia de la filosofía de la matemática, al menos para quienes pertenecen a otras tradiciones que luego hemos de caracterizar.

A la tercera de nuestras preguntas, o sea, cómo proceder para ampliar nuestro conocimiento matemático, Pitágoras diría que ello se logra desarrollando nuestras facultades intelectuales, especialmente la de intuición, y también, aunque en ciertos casos y en mucha menor medida, nuestra capacidad lógica. Finalmente, a propósito de la pregunta acerca de cómo se vincula la matemática, que se ocupa del segundo mundo, con la realidad concreta, que se refiere al primer mundo, Pitágoras parece entender algo muy importante: piensa en una suerte de isomorfismo o correspondencia entre las propiedades aproximadas de las cosas que percibimos a nuestro alrededor y las propiedades estructurales rigurosas de los objetos matemáticos. Por consiguiente, parece haber sido el primero que entrevió un método *modelístico* como los que hoy empleamos en física. Ante determinado problema acerca del mundo físico, podemos pasar por isomorfismo a la estructura matemática correspondiente, aprovechar los algoritmos y métodos matemáticos para resolver nuestro problema en el ámbito matemático y, una vez resuelto, volver atrás para encontrar cómo se refleja la solución matemática en una solución física. La respuesta de Pitágoras, entonces, es que la utilidad y relación que tiene la matemática con el mundo real se debe al isomorfismo aproximado y parcial que hay entre el mundo concreto y el mundo de las entidades matemáticas. Esta idea es muy significativa porque la metodología que resulta de ella se refleja, entre otras cosas, en los procedimientos de medición tal como los practican, por ejemplo, los físicos. ¿Qué hace el físico al medir? Pasa de una estructura concreta (una vara, un terreno) a entidades matemáticas (longitudes, superficies) expresadas por números, las *medidas* que corresponden a las cantidades concretas; luego puede trabajar con dichas medidas mediante algoritmos y cálculos, tratando por ejemplo de hallar relaciones entre ellas o resolver un problema; finalmente, vuelve atrás: las soluciones matemáticas se transforman en soluciones de su problema físico. Y aquí radicaría el gran valor utilitario de la matemática como instrumento para producir conocimiento acerca de la naturaleza o la sociedad.

Lo que interesa en Pitágoras es su idea de que ciertas propiedades de los objetos concretos del primer mundo dependen de las propiedades de los objetos no empíricos del segundo. Por ejemplo, se afirma que Pitágoras (o algún miembro de su escuela) comprobó empíricamente que hay una correlación entre el tono o altura del sonido que se puede extraer de una cuerda vibrante y

la longitud de ésta, lo cual mostraría que las propiedades matemáticas de las longitudes podrían permitirnos conocer propiedades físicas de los sonidos. Los sonidos armoniosos (consonantes) se producen cuando las longitudes de las cuerdas se hallan en relación de números enteros y pequeños, y así la razón 2/1 origina la octava, la razón 3/2 la quinta y la razón 4/3 la cuarta. Por consiguiente, Pitágoras introduce en ciencia por primera vez la noción de que un modelo matemático puede ayudarnos a comprender aspectos vinculados con el comportamiento de la naturaleza, y éste sería, como ya señalamos, el punto en el que comenzaría la aplicación sistemática de la matemática a la obtención de conocimiento acerca del mundo natural. No cabe la menor duda, salvando los aspectos un tanto místicos que impregnan esta tesis, que cada vez que advertimos la intromisión de un lenguaje matemático para estudiar problemas concretos nos hallamos en la tradición pitagórica. La influencia histórica de ésta en cuanto a la cuestión de cuál es la relación entre matemática y realidad no puede por tanto ser soslayada.

No podemos detenernos en los logros específicos de la escuela pitagórica en materia de aritmética y geometría, que fueron muchos, pero debemos aclarar que no hay demasiada información acerca de cómo los pitagóricos llegaron al enunciado del célebre "teorema de Pitágoras": "el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es, en cuanto a áreas, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos". Se halla en tela de juicio si se lo obtuvo por una deducción a partir de conocimientos anteriores o fue en realidad inferido por la observación de ciertas figuras que permitían evidenciar lo que afirma el teorema. Todavía hoy, en la geometría elemental, el teorema se suele "demostrar" por igualdad de áreas de figuras que se componen y descomponen como rompecabezas: con las piezas del mismo se arma un cuadrado que representa el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo y luego las mismas piezas dan lugar a dos cuadrados cuyos lados son los catetos. Por otra parte, algunos historiadores creen que quizás el enunciado no haya sido original de la escuela pitagórica (ya hemos señalado que era conocido por los babilonios), lo cual nos recuerda la ironía del matemático alemán Félix Klein, del siglo XIX, cuando afirmaba que "si un teorema lleva el nombre de un matemático, es seguro que ese matemático no es su descubridor".

En lo que atañe a los propósitos de este libro, insistimos, a manera de síntesis, en que Pitágoras debe ser destacado: primero, por haber dado contestaciones totalmente diversas a las que daban los egipcios en cuanto a la naturaleza de los objetos matemáticos, y en segundo lugar, por haber ofrecido una nueva forma de justificar las verdades geométricas, a través de un cierto tipo de intuición. Difiere de Tales en el sentido de que el razonamiento no ocupa un lugar primordial para el acceso a la verdad. E importa también su notable concepción "modelística", según la cual existe una correspondencia o isomorfismo que vincula las entidades matemáticas del segundo mundo con las del primero, de

modo tal que el conocimiento de propiedades numéricas o geométricas permitirá, en principio, acceder al de las propiedades de la realidad concreta. Ello no significa que la conoceremos únicamente por medio de la matemática; será necesario además estudiar la naturaleza de ese isomorfismo, sus alcances y sus limitaciones. Y finalmente, si hemos de creer a ciertos historiadores, Pitágoras importa también por haber provocado por primera vez la irrupción en la ciencia de los términos teóricos.

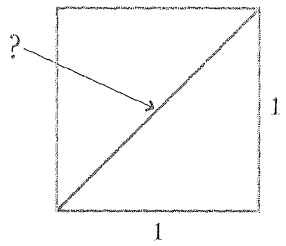
El problema de la inconmensurabilidad

En el pensamiento de Pitágoras, señalábamos, hallamos claramente ese aspecto un tanto extraño del conocimiento no solamente matemático sino también científico en general, que es el empleo de los términos teóricos. La intuición que nos permite la mente ofrece, según los pitagóricos, la noción de *espacio extenso*. Pitágoras creía que los puntos, las más pequeñas y reducidas componentes del espacio físico, debían tener extensión, por lo cual todo segmento no sería más que un número finito de puntos en hilera y el espacio físico un conglomerado de tales puntos extensos. Los puntos, tanto concretos como entendidos formando parte del segundo mundo, son para Pitágoras algo análogo a lo que para nosotros son los cuerpos: tienen la propiedad de extensión, es decir, son una suerte de "átomos" últimos que ocupan lugar en el espacio.

Que los puntos sean extensos le viene como anillo al dedo a Pitágoras, porque la conclusión que deriva inmediatamente de allí es que, dados dos segmentos cualesquiera, deben ser *conmensurables*. Aclaremos lo que ello significa. Si un segmento se divide en un cierto número n de partes iguales, cada una de ellas es llamada *parte alícuota* del segmento dado, y éste puede ser considerado como la acumulación o suma de n partes alícuotas. Si se toma la longitud de una parte alícuota como unidad de medición de la longitud del segmento, se dirá que n es la *medida* de dicha longitud. Cuando se afirma que la longitud de un segmento es igual a 15 cm, se quiere decir: (a) que se ha tomado como unidad de medición la longitud llamada *centímetro*; (b) que un segmento que mide 1 cm es parte alícuota del segmento, pues cabe exactamente quince veces en él; y por tanto, (c) que la medida de la longitud del segmento con respecto a la unidad llamada "centímetro" es el número 15. La conmensurabilidad de dos segmentos supone que es posible encontrar alguna unidad de medida común para ambos, es decir, tal que el "segmento unidad" sea, a la vez, parte alícuota de uno y otro, aunque el número que expresa la medida, en cada caso, no sea el mismo. La medida de la longitud de un segmento con respecto a la unidad podría ser m, y la medida de la longitud del otro con respecto a la misma unidad ser n; por ejemplo, si se emplea el centímetro como unidad de medición, un segmento podría medir 15 cm y el otro 8 cm, poniéndose en evidencia que

la longitud del "centímetro" es parte alícuota común a ambos. Pitágoras piensa que, si se consideran dos segmentos cualesquiera, se encontrará finalmente una unidad *mínima* de medida común, que sería en definitiva la longitud del punto extenso.

Ésta hubiese sido una bellísima teoría, pero resultó un estrepitoso fracaso. Y fracasó, paradójicamente, en virtud del teorema de Pitágoras. Si consideramos un cuadrado tal que la medida de la longitud del lado sea igual a *uno*, del teorema de Pitágoras inferimos que la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos será $1^2 + 1^2 = 2$. (Véase la figura.) Entonces, puesto que 2 es el cuadrado de la medida de la longitud de la hipotenusa (diagonal del cuadrado), ésta tendrá una longitud cuya medida debería ser *un número cuyo cuadrado sea igual a 2*. Pero los pitagóricos demostraron que *ninguna fracción o quebrado cumple esa propiedad*. La diagonal del cuadrado y su lado son, pues, segmentos inconmensurables.



La demostración pitagórica es sencilla y la exponemos a continuación empleando el método de reducción al absurdo, que consiste en este caso en suponer que tal fracción existe y mostrar que ello conduce a una contradicción. De existir la fracción, tendrá la forma m/n, donde m y n son números naturales. Admitamos que ella es irreducible, o sea que no hay divisores comunes distintos del número 1 entre el numerador y el denominador. Esto significa que si la fracción fuera, por caso, 28/20, la reduciríamos a 7/5, igual a la anterior. Entonces tendríamos que el cuadrado de m/n, es decir $(m/n)^2 = m^2/n^2$, debería ser igual a 2. Por tanto, $m^2/n^2 = 2$ y entonces $m^2 = 2\ n^2$, lo cual significa que m^2 tiene que ser un número par. Pero entonces, a su vez, m también debe ser par (por resultar imposible que el cuadrado de un número impar sea par), y por consiguiente m tendrá la forma $m = 2q$, de donde $m^2 = 4q^2$. Haciendo el reemplazo correspondiente se obtiene $2n^2 = 4q^2$, y simplificando, $n^2 = 2q^2$, lo cual significa que n^2 es también par y por consiguiente también lo será n (por la misma razón anterior). Entonces n tendrá la forma $n = 2r$. Pero ello es absurdo, porque se ha concluido que la fracción m/n es idéntica a $2q/2r$, en contra de la suposición inicial de que esta fracción ya estaba reducida y que no hay factores comunes al numerador y al denominador. La contradicción consiste en que m/n debe ser, a la vez, irreducible y reducible. Por consiguiente, no exis-

te ningún quebrado o fracción m/n cuyo cuadrado sea igual a 2: tal es la conclusión que se obtiene[6].

Los pitagóricos probaron así que la diagonal del cuadrado es inconmensurable con respecto al lado y entonces la hipótesis de que existiría una "unidad atómica" última de longitud, constitutiva del universo, el punto extenso, es falsa. Éste parece ser uno de los primeros ejemplos de una refutación de una teoría fáctica realizada por medios lógicos. Como consecuencia, se produjo una conmoción que llevó a los pitagóricos a comprender que forzosamente un segmento de recta, si bien está constituido por puntos últimos, éstos deben ser *puntos sin extensión*[7]. El punto sin extensión es una abstracción casi completamente incomprensible desde el punto de vista intuitivo, pero los pitagóricos advirtieron que no había escapatoria. Naturalmente ello está por encima de toda experiencia que podamos tener. Afirma el matemático italiano Federigo Enriques en su *Historia de la lógica* que fue aquí donde surgió por primera vez en la historia de la ciencia un término teórico, en el sentido de que el punto del que hablamos se referiría a una entidad que está más allá de nuestra experiencia pero cuya existencia suponemos. Porque admitiendo que existe y que tiene ciertas propiedades, explicamos lo que sí podemos conocer directamente por la experiencia de nuestros sentidos. (Como se advierte, Enriques atribuye a los pitagóricos el haber introducido por primera vez términos teóricos en ciencia, mérito que en opinión de otros historiadores, como ya señalamos, debería ser reservado para Tales.)

La tesis pitagórica de que los puntos geométricos deben tener extensión, por lo cual todo segmento no sería más que un número finito de puntos extensos en fila, fue criticada también desde la perspectiva de otras tradiciones filosóficas, en particular por Zenón de Elea, del siglo V a.C., perteneciente a la llamada "escuela eleática". De entre sus cuatro argumentos se destaca el llamado "de Aquiles y la tortuga", que exponemos brevemente.

El argumento de Zenón critica no sólo la concepción pitagórica de que un segmento está conformado por un número *finito* de puntos geométricos extensos sino también la de que un intervalo de tiempo resulta de la reunión de un número *finito* de lapsos últimos, a los que podríamos llamar "puntos temporales extensos".

6 En la actualidad diríamos simplemente que la diagonal del cuadrado mide $\sqrt{2}$ y que éste es un número *irracional*, porque, precisamente, no se puede expresar por medio de una fracción m/n. Pero los pitagóricos no conocían tales números y de allí la formidable sorpresa que causó la demostración que hemos presentado. Pese al anacronismo, al episodio se lo llama "el escándalo de los irracionales".

7 Según una leyenda, la existencia de longitudes inconmensurables fue ocultada por los pitagóricos hasta que uno de ellos, Hipaso de Metaponte, se atrevió a divulgarla, por lo cual fue asesinado. Otra afirma que el descubrimiento fue celebrado sacrificando una vaca a los dioses. Trátese de Hipaso o la vaca, estaríamos aquí en presencia de los primeros "mártires de la ciencia", como afirma con humor Bertrand Russell.

El veloz Aquiles persigue a una tortuga partiendo de A, pero acepta que el animal parta de T en el mismo instante, de modo que en ese momento ambos corredores se hallan entre sí a una distancia AT. En estas condiciones, ¿alcanzará Aquiles a la tortuga? Zenón tratará de demostrarnos que no. Se puede exponer el argumento por reducción al absurdo, suponiendo que efectivamente Aquiles *alcanza* a la tortuga en un punto P y así llegar a una contradicción. Cuando Aquiles recorre AP, la tortuga recorre, *en el mismo tiempo*, la distancia TP. Dado que AP es mayor que TP, hay más puntos extensos en AP que en TP, pero el intervalo de tiempo que transcurre durante la carrera consta de un determinado número de puntos temporales extensos. Y puesto que a cada uno de ellos le corresponde un punto geométrico donde se halla Aquiles y otro punto geométrico donde se halla la tortuga, debe resultar que el número de puntos de AP y el número de puntos de TP ha de ser el mismo, lo cual entra en contradicción con la afirmación de que AP es mayor que TP. El todo resulta ser igual a la parte. Por consiguiente, Aquiles nunca alcanzará a la tortuga.

Desde luego, Zenón sabía perfectamente que, como hecho empírico, Aquiles finalmente alcanzará a la tortuga, pero su crítica está destinada a mostrar que los puntos y los instantes no pueden ser discretos o extensos (es decir, separados drásticamente los unos de los otros), o bien, como diríamos hoy, que el espacio y el tiempo son infinitamente divisibles, en contra de la opinión pitagórica. La falacia que implica su notable argumento no pudo ser desenmascarada hasta el siglo XIX, con el desarrollo de nuevas concepciones de la matemática sobre los conjuntos infinitos, para los cuales es admisible que el todo sea igual a la parte, y también con la introducción de la noción de *límite de una sucesión infinita*. De allí que Bertrand Russell afirme:

> En este mundo caprichoso, nada es más caprichoso que la fama póstuma. Una de las víctimas más notables de la falta de sentido de la posteridad es Zenón de Elea. A pesar de haber inventado cuatro argumentos todos extraordinariamente sutiles y profundos, la estupidez de los filósofos posteriores proclamó que Zenón no era sino un juglar ingenioso, y que sus argumentos no eran sino sofismas. Después de dos milenios de constantes refutaciones, estos sofismas fueron enunciados nuevamente y sentaron las bases de un renacimiento matemático[8].

8 Citado por Geymonat, L., *El pensamiento científico,* Buenos Aires, Eudeba, 1961, p. 13.

Quizás no sea inoportuno señalar aquí que Kant, en el siglo XVIII, se vio llevado inadvertidamente a cometer una falacia similar a la anterior, la llamada *falacia de división*, que consiste en trasladar las propiedades del todo a sus partes. Ello es incorrecto. Ciertos conjuntos son colecciones, pero de aquí no podemos concluir que los objetos coleccionados, a su vez, también lo sean. Una biblioteca es una colección de libros, pero no lo es cada libro por separado. Kant comete la falacia al afirmar que, dado que el espacio físico tiene extensión, sus constituyentes últimos, los puntos, también deben tenerla. Un Zenón del siglo XVIII podría haberle aplicado a la conclusión kantiana, con total pertinencia, sus célebres argumentos destinados a refutar las opiniones pitagóricas.

Las concepciones matemáticas de Platón

Pese a una sublevación jónica a comienzos del siglo V a.C., los ejércitos persas prosiguieron avanzando hacia el oeste, pero encontraron la firme resistencia de los griegos en el transcurso de las llamadas *guerras médicas*. En 479 a.C., los invasores persas fueron expulsados definitivamente, y Atenas, cuya participación en la guerra había sido decisiva, se convirtió en el estado más importante de Grecia y su flota naval en la más poderosa del Mar Egeo. Hacia 430 a.C. había extendido su influencia y dominio hasta tal punto de que ejercía el control sobre las otras ciudades-estado de la región. El período de preponderancia ateniense durante buena parte del siglo V a.C. es denominado la 'Edad de Oro" de Grecia y a dicho siglo se lo conoce como "Siglo de Pericles", en homenaje al brillante político bajo cuyo gobierno, ejercido durante treinta años, la ciudad llegó a convertirse en el epicentro de la cultura europea. Allí se estableció una forma de democracia directa, que desde luego no involucraba la igualdad de todos los individuos, ya que no se reconocían derechos cívicos y políticos, entre otros, a esclavos, extranjeros y mujeres, es decir, a la gran mayoría de la población. Pericles hizo construir el Partenón y otros célebres edificios, al igual que murallas para proteger a la ciudad y la ruta hacia el puerto del Pireo, en el mar Egeo. Atenas se convirtió en un espléndido ámbito de creación literaria, artística y científica, que vio florecer a filósofos como Anaxágoras y Sócrates, historiadores como Tucídides y Heródoto, escultores como Fidias, arquitectos y urbanistas como Hipodamos, autores de comedias como Aristófanes y dramaturgos como Esquilo, Sófocles y Eurípides.

Pero el proyecto político de Pericles encontró un fuerte obstáculo en las pretensiones de Esparta, alrededor de la cual se creó en 550 a.C. una liga de ciudades del Peloponeso destinada a derrocar la supremacía ateniense. Ello derivó en la llamada *guerra del Peloponeso*, sostenida entre dos grandes confederaciones, la ateniense y la espartana. Iniciada en 431 a.C., la guerra finalizó en 404 a.C. con la victoria de Esparta, cuyos gobernantes pusieron fin a la democracia en Atenas y establecieron gobiernos aristocráticos en toda Grecia. En 403 a.C.,

los atenienses se sublevaron y restauraron su independencia, a la vez que otras ciudades griegas se rebelaban contra el dominio espartano. Las luchas por la hegemonía en Grecia se extendieron hasta mediados del siglo IV a.C.

En este complejo contexto histórico vivió Platón (c.428 - c.347 a.C.). Proveniente de una familia aristocrática de Atenas, fue discípulo y amigo de Sócrates y aceptó en principio su filosofía. Sin embargo, ella tiene un fuerte sesgo de carácter ético, y por consiguiente resulta un tanto asombroso que de tal maestro haya surgido un entusiasta de la matemática del calibre de Platón. Si bien en su juventud éste tuvo ambiciones políticas, nunca pudo concretarlas pues en modo alguno simpatizaba con la democracia ateniense, y por ello al promediar su vida se dedicó enteramente a la filosofía. A la muerte de Sócrates, durante la guerra del Peloponeso, Platón abandonó Atenas por algún tiempo y realizó viajes por Megara, Egipto y el sur de Italia, donde conoció al pitagórico Arquitas de Tarento. Este encuentro parece haber sido el origen de la gran influencia que el pensamiento de Pitágoras ejerció sobre Platón. En el año 387 a.C. fundó en Atenas la *Academia*, institución a menudo considerada como una suerte de primera universidad europea. Allí prosiguió enseñando y realizando sus estudios filosóficos, interrumpidos por dos breves excursiones a Sicilia, hasta su muerte a los ochenta años. (Es interesante señalar que la Academia, a diferencia de otras instituciones similares del mundo antiguo, perduró hasta 529 d.C., año en que el emperador cristiano Justiniano ordenó que fuese disuelta por considerarla un bastión del paganismo.) Los escritos de Platón, redactados en forma de diálogos, convirtieron a su autor en una de las figuras más gravitantes de la historia de la filosofía occidental.

Nos hallamos ahora en presencia de un pensador de especial trascendencia y genio, cuyos ecos se hacen sentir con intensidad incluso en la actualidad. Pero en cuanto a concepciones acerca de la matemática, las suyas no difieren mucho de las de Pitágoras, y lo que hemos afirmado acerca del modo en que los pitagóricos hubiesen contestado nuestras cuatro preguntas se le podría aplicar. Sin embargo, es necesario añadir aquí que la matemática tuvo una particular influencia en el pensamiento metafísico y ontológico de Platón, y vale la pena recordarlo porque de alguna manera ello influyó en la metodología del conocimiento científico en general.

En cuanto al problema de los objetos matemáticos, Platón acepta la tesis pitagórica de que más allá de un primer mundo, el de las entidades concretas, hay un segundo mundo, poblado en particular por las *entidades formales* de la matemática. (Aclararemos luego esta aplicación de la palabra "formal" a los habitantes del segundo mundo.) Pero además hay en el segundo mundo otro tipo de entidades formales constituidas por las cualidades y también, como diríamos hoy, por las relaciones y otras entidades consideradas por la lógica. El segundo mundo de Platón está poblado sin duda por entidades matemáticas, pero está también habitado por los *universales*, o sea las cualidades, las propiedades, entendidas como objetos formales especiales, de los cuales también, por isomorfis-

mo o por *participación*, como Platón lo dice, permitirían comprender lo que ocurre con las entidades concretas del primer mundo. Nuestro filósofo cree que así como el isomorfismo establece la relación entre el mundo formal y el mundo concreto, también es cierto que el mundo concreto participa de las propiedades de los universales, que no son otra cosa que las *ideas* o *formas*, llamadas a veces *esencias*, en un sentido general, que encontramos en el segundo mundo: por dicha razón hemos llamado *formales* a estas entidades. Tal concepción de carácter general se inspira claramente en la matemática. Las formas matemáticas son "lo que tienen en común" muchos objetos concretos que, por ejemplo, siendo en algunos casos platos, en otros ruedas, en otros tocones de un árbol cortado, son todos circulares. Aquí, cada objeto presenta un aspecto circular, pero la forma o idea común a todos ellos es la "circularidad", habitante del segundo mundo formal. En igual sentido, también "blancura" es una forma o idea: lo que hay de común en muchos objetos distintos del primer mundo pero todos ellos blancos.

La diferencia entre Platón y los empiristas primitivos como Ahmés (y los empiristas de la filosofía en general) es que, además de los objetos azules del primer mundo, existiría el "universal azul", que no está presente en una entidad concreta, una flor azul, sino que habita en el segundo mundo: la flor *participa* del universal azul. Si esto es así, la contestación de Platón a la primera de nuestras preguntas, acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos, se hace extensiva a todo tipo de conocimiento. Y en cuanto a la segunda pregunta, sobre el fundamento de las afirmaciones matemáticas, corre la misma suerte, porque radicaría en la intuición (infalible) de los objetos formales y de los universales. En el ejercicio reiterado de tal intuición se hallaría la respuesta a la tercera pregunta: nuevas intuiciones conducirán a nuevos conocimientos. Finalmente, el conocimiento de la realidad concreta, cuestión que atañe a la cuarta pregunta, se lograría en virtud de la vinculación de aquélla con el segundo mundo, el de las formas o universales.

Sería importante en este momento señalar cuáles son las tres creencias o principios del pensamiento de Platón, y cuáles son sus consecuencias metodológicas, que también son tres. El primer principio es el principio *ontológico*, según el cual hay entidades tales como las entidades matemáticas, y también los universales (cualidades, propiedades), de carácter formal, que habitan el segundo mundo. El segundo principio, que podría ser llamado *gnoseológico* o *epistemológico* porque atañe al conocimiento, es que los seres humanos tenemos la facultad de poder "atrapar" mediante cierto tipo de intuición tales objetos y universales. Finalmente, el tercero es la noción de que el lenguaje, los vocablos del lenguaje, las palabras, son la contrapartida lingüística de las entidades formales y los universales del segundo mundo, por lo cual podríamos llamar *lingüístico* a este último principio, y más específicamente *semántico*. Conviene recordar, a propósito del lenguaje, y para emplear la terminología de ciertos lógicos contemporáneos, que se reserva la palabra "sintaxis" para todo aquello que involucre signos y sus combinaciones, y la palabra "semántica" para el caso en que

se contemple el significado y la referencia dirigida hacia entidades externas al lenguaje. A ello habría que agregar la palabra "pragmática", que se refiere al *uso* de las expresiones. Cada uno de estos aspectos del fenómeno lingüístico, la sintaxis, la semántica y la pragmática, originan problemas muy ligados entre sí, pero constituyen, realmente, ámbitos de estudio diferentes, aunque en conjunto se los considere formando parte de la disciplina llamada "semiótica" o "teoría general de los signos".

El principio platónico o semántico afirma, según una tradición que ha perdurado durante mucho tiempo, lo siguiente: "para cada término, una idea". Dicho de otro modo: lo que otorga significado a una palabra es el hecho de que a ella está asociada una idea o forma de la cual es su representación lingüística. Se supone que nuestra capacidad lingüística es tal que, si hemos aprendido el lenguaje que empleamos, si comprendemos aquello que decimos, podremos captar, para cada palabra, la idea correspondiente que le conviene; por lo cual la comunicación consiste en que, a través del intercambio de las palabras, éstas despiertan en nosotros las ideas asociadas a ellas y podemos incluso llegar a tener, aunque esto no es forzoso, la intuición de las mismas. En filosofía, como ya lo hemos señalado a propósito de Pitágoras, la palabra *intuición* significa el contacto directo con el objeto o entidad conocida, y esta acepción debe ser diferenciada de aquélla que la asimila a "pálpito" o "corazonada".

Si aceptamos este punto de vista platónico, llegamos rápidamente a las siguientes consecuencias metodológicas vinculadas con la obtención del conocimiento. (1) Diría Platón que lo primero que hay que hacer es, frente a cada palabra, determinar cuál es la idea formal o universal que ella está representando. Supongamos, por ejemplo, que se tratara de un conocido enunciado geométrico: "por cualquier par de puntos pasa una recta y solo una". Si acudiésemos a un procedimiento de verificación ligado al significado lógico de la palabra "todos", sería necesario examinar todos los pares de puntos (que son infinitos) y todas las rectas que pasan o no pasan por esos dos puntos (que también son infinitas). Esto es totalmente imposible. Pero Platón afirma que para decidir la verdad o la falsedad del enunciado no hay que dirigirse a los objetos concretos que son casos particulares del mismo, sino a las ideas que involucran, lo cual implica examinar solamente un número finito de entidades del segundo mundo, algo que es perfectamente posible. (2) La segunda indicación de Platón es que, una vez que hemos conocido cuál es el universal representado por una palabra, hay que tratar de tener la intuición del mismo. Esto último implica naturalmente una habilidad especial de la que disponemos los seres humanos. Lo importante aquí es captar esas ideas o formas, lo cual no es sencillo ni está al alcance de cualquiera, pero la capacidad de intuirlas se puede adquirir con la práctica y el entrenamiento filosófico. El resultado conduce a la contemplación o conocimiento directo de las ideas involucradas por el vocabulario que estamos empleando. (3) Finalmente, la tercera recomendación de Platón es que, una vez

que podemos contemplar los universales, debemos "atrapar" por intuición las relaciones que hay entre ellos. Como afirma nuestro filósofo, tal cosa debe hacerse "con los ojos de la inteligencia". Si esto se conoce, también se conocerá cuáles son las leyes o particularidades generales que encontraremos no sólo en la matemática sino en la ciencia en general, y que podemos, por participación, aplicar a la realidad del mundo concreto. En nuestro ejemplo anterior, tendríamos que "ver" si, efectivamente, las ideas de "punto", de "recta", de "pasar por" y de "único" están vinculadas entre sí de modo tal que la proposición resulte verdadera o, en caso contrario, falsa. De esta manera, lo que parecía una empresa imposible ya no lo será, pues habríamos obtenido la verificación del enunciado en cuestión y nuestro conocimiento quedaría probado. Llevar a cabo un número finito de intuiciones a examinar resolvería la dificultad impracticable de inspeccionar infinitas entidades.

Puesto que será importante para nuestro análisis posterior del punto de vista de Aristóteles, señalemos que Platón sostiene la tesis de que, por la naturaleza peculiar del alma humana, de características un tanto semidivinas, tenemos la capacidad potencial de conocer las propiedades de todos los universales. Lo que hace la intuición racional cada vez que la ejercemos es despertar nuestro conocimiento dormido; ésta es la teoría llamada de la *anamnesis*. Platón exigía como condición para ingresar a su Academia "nadie entre aquí si no conoce geometría", porque de alguna manera el conocimiento geométrico era para él una especie de entrenamiento propedéutico, para recordar y revivir aquello que se halla dormido en nosotros. En su libro *La República*, Sócrates, personaje portavoz de las opiniones de Platón, ante el comentario de su interlocutor de que "la geometría tiene por objeto el conocimiento de lo que siempre existe", comenta: "por consiguiente, será una enseñanza que atraiga el alma hacia la verdad y haga nacer ese espíritu filosófico que eleva nuestras miradas a las cosas de lo alto en vez de volverlas, como hacemos indebidamente, a las cosas de aquí abajo". Lo que ocurre, nos dice Platón, es que esa intuición para la captación de verdades se halla un tanto adormilada: solamente ciertas ideas y ciertos conocimientos se presentan a nuestra experiencia, tal vez porque, como diríamos en términos actuales, no podríamos subsistir biológicamente si todo lo existente nos llamara la atención y demandara la urgencia del conocimiento. A propósito de sus experiencias con el ácido lisérgico y la mescalina, Aldous Huxley afirmaba que, de no ser por cierta acción inhibitoria del cerebro, éste podría conocerlo todo y entonces no podría prestar atención a nada en particular y sobrevendría su muerte biológica. (En este punto, Huxley citaba al poeta William Blake: "si se limpian las puertas de la percepción, todas las cosas aparecen como lo que son, es decir, infinitas".) Quizá sea un imperativo de nuestra parte animal, no semidivina, el no poder tratar a la vez con todo el conocimiento posible y permitir que en la conciencia aflore únicamente aquél que es imprescindible por razones prácticas y de supervivencia.

Después de haber hecho este panegírico del pensamiento de Platón, parece difícil de creer que tengamos el propósito de convencer al lector de que por este camino no es posible obtener nada parecido al conocimiento matemático o científico en general. La razón es que la facultad de intuición, que aparece como segundo principio en la metodología platónica, resulta cuestionable por dos argumentos principales: la "objeción gnoseológica", así llamada porque se vincula con la naturaleza del conocimiento, y la "objeción basada en la historia de la ciencia". La objeción gnoseológica afirma que la experiencia directa de las ideas o los universales puede hallarse tan perturbada como ocurre con la experiencia sensorial común. Todos sabemos que en esta última puede haber perturbaciones como el daltonismo; la persona afectada percibe un color distinto a aquel percibido por la persona normal y, en cierto sentido, desde el punto de vista terapéutico, se diría que la percepción del daltónico está perturbada. Desde la perspectiva estrictamente filosófica, ello podría ser discutible, y quizás podríamos afirmar que se tienen experiencias diferentes; pero si afirmamos que algo análogo sucede con las ideas, podría acontecer que Juan, cuando se trata de la palabra "círculo", tuviera la intuición del círculo, en tanto que Pedro, ante la misma palabra, tuviera la intuición de la elipse. Con mucho ingenio el filósofo argentino Ambrosio Gioja denominaba a esta posible perturbación el "daltonismo de esencias". La pregunta es: ¿y quién tiene la intuición auténtica, no contaminada? Responderla es complicado. Se podría argumentar que es posible decidirlo porque quien accede a una idea y no a la otra se encontraría en dificultades ante la experiencia, ya que Juan y Pedro, por ejemplo, no acordarían en cuanto a si las distancias del centro de la figura a los puntos del borde son invariables. Pero si el descubrimiento de que hay algo impropio en una intuición queda condicionado a la experiencia, resultaría que la intuición no es el último árbitro del conocimiento. Por consiguiente, parecería que la pretensión de hacer descansar el conocimiento en la intuición quedaría un tanto bloqueada por el peligro de perturbación y el tener que recurrir a algún tipo de metodología previa, de un orden muy distinto al intelectual, de carácter empírico, para salir de dudas acerca de si estamos perturbados o no.

En cuanto a la segunda objeción, que hemos denominado "de historia de la ciencia", es la siguiente: si realmente tuviéramos esa infalible facultad de intuición, el conocimiento tendría que desarrollarse de manera acumulativa, a medida que realizamos más y más intuiciones. El avance de la ciencia sería continuo, como el de una empresa que atesora cada vez más capital, que no tiene necesidad de rever su estructura y sólo debe preocuparse de lo indispensable para garantizar nuevas incorporaciones de patrimonio. Pero el espectáculo histórico que se contempla en la evolución de la ciencia es una sucesión de ideas, modelos, teorías, conjeturas y conceptos cambiantes, que se sustituyen a veces paulatinamente, por ajustes, pero que otras veces son abandonados bruscamente a través de revoluciones científicas que presentan esquemas totalmente dife-

rentes a los anteriores. Si la naturaleza nos proveyó de semejante facultad de intuición, ésta opera en nosotros de una manera lamentable. Si se nos permite caricaturizar una frase célebre, podría decirse que "el camino del infierno científico está sembrado de buenas *intuiciones*". Siendo así, en virtud de que no parece que el intuicionismo platónico se autoabastezca para saber cuándo una intuición está o no perturbada ni cuáles son las características que garantizarían éxito para distinguir entre conocimiento válido y falsedades, hay que reconocer que la metodología de Platón, a pesar de su atractivo, fracasa, o por lo menos no puede ofrecer garantías suficientes.

Por todo ello, la posición de Platón suele parecer excesivamente audaz a muchos filósofos pragmatistas o empiristas contemporáneos. Sin embargo, su influencia en el surgimiento de la ciencia renacentista y moderna, entre los siglos XVI y XVII, no puede ser desestimada. Y es muy acentuada en algunas escuelas filosóficas de fines del siglo XIX y del siglo XX. Nadie puede comprender la fenomenología de Edmund Husserl si no admite lo que éste expresa en su libro *Ideas relativas a una fenomenología pura y una filosofía fenomenológica* (1913): la reivindicación de actitudes platonistas en la fundamentación de la ciencia y en la fundamentación de la filosofía. Por otra parte, hay personajes de peculiar importancia en la historia de la matemática, como George Cantor y Kurt Gödel, de cuya obra nos ocuparemos más adelante, que adoptaron un punto de vista platónico pues aceptaron la existencia de un segundo mundo formal habitado por las entidades llamadas *conjuntos*. En ética, algunos filósofos han concebido también un "mundo de los valores" aparte del mundo de lo concreto, y ese mundo platónico sería el que, por intuición, deberíamos conocer para fundamentar la disciplina. En cierto modo la escuela platónica, el platonismo, no se ha perdido por completo, e incluso en ciertas formulaciones contemporáneas es difícil de refutar.

Si bien Platón, en sí mismo, no fue un matemático original, su influencia sobre el desarrollo de la matemática posterior tuvo una importancia fundamental, como lo expresa este comentario de Proclo, filósofo del siglo V d.C.: "Concedió a la matemática en general, y a la geometría en particular, en virtud de su entusiasmo por ellas, un lugar primordial, lo cual es bastante obvio ante la manera en que llenó sus libros con ejemplos matemáticos, que en todas partes suscitan admiración en quienes se consagran a la filosofía". Efectivamente, Platón alimentó la fe y la vocación por la matemática, propuso problemas geométricos claves para que fueran resueltos por sus discípulos y no sorprende, por todo ello, que del seno de la Academia hayan surgido, entre otros, dos de los más importantes matemáticos de la antigüedad: Teetetos (c. 415 - c. 369) y en particular Eudoxo (c. 408 - c. 355 a.C.). El primero inició el estudio de los números irracionales y la teoría de los poliedros regulares; en particular, mostró que de éstos sólo pueden existir cinco (tetraedro, octaedro, icosaedro, hexaedro o cubo, dodecaedro). En cuanto a Eudoxo, sin duda el mayor matemático y astrónomo

de su época, desarrolló la teoría de las proporciones y el llamado *método de exhaución*, antecedente de lo que luego habrá de ser el cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz, método con el cual fundamentó las fórmulas para calcular el volumen de la pirámide y del cono. También inició el estudio de la llamada *sección áurea*[9]. Muchos resultados obtenidos por estos dos matemáticos de orientación platónica fueron incluidos posteriormente por Euclides en su sistematización de la geometría, los *Elementos*, que analizaremos en el Capítulo 4.

Cabe señalar, a modo de ilustración, que en esta época ya encontramos en la matemática griega los llamados "tres problemas clásicos": la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. En cada caso, se trata de construir, por medio de rectas y circunferencias (hablando instrumentalmente, con regla y compás), un cuadrado de igual área que un círculo dado, un ángulo igual a la tercera parte de un ángulo dado y un cubo cuyo volumen sea igual al doble de un cubo dado (problema de Delos). La exigencia de que tales problemas sean resueltos empleando *exclusivamente* la regla y el compás, como habría de ser probado muchos siglos después de que fueran formulados, los vuelve irresolubles. No obstante, se los puede resolver utilizando líneas más complicadas que la recta o la circunferencia.

Hemos destacado que, pese a la gravitación de Platón como difusor de la importancia de practicar la matemática, sus aportes a la disciplina no fueron significativos. Tampoco lo fueron los de su más ilustre discípulo, Aristóteles. Sin embargo, este extraordinario filósofo diseñó una metodología que consideró *válida para toda ciencia*, incluyendo a la matemática, y que ejerció una influencia sin igual durante muchos siglos en la historia cultural de Occidente. Por su trascendencia, dedicaremos seguidamente al pensamiento aristotélico un tratamiento especial.

9 **Nota para el lector interesado.** La cuestión se origina en el siguiente problema: "Dividir un segmento de manera que la razón entre el segmento y la parte mayor sea igual a la razón entre la parte mayor y la menor". Dado un segmento AB, se trata de encontrar un punto interior C tal que AB/AC sea igual a AC/CB. En estas condiciones, se dice que C ha producido la *división* o *sección áurea* de AB. La razón AB/AC = AC/CB se denomina *número áureo* (ϕ), y su valor es un número irracional aproximadamente igual a 1,618. Se ha considerado que el rectángulo cuya base y altura se hallan en la relación ϕ es el más armonioso y que el número áureo encierra uno de los secretos de la belleza. Muchos frontispicios y fachadas (como la del Partenón) respetaron esta proporción, llamada *divina* durante el Renacimiento. El famosísimo dibujo conocido como *Las proporciones del hombre*, de Leonardo da Vinci, está basado en las teorías del arquitecto romano Marco Vitrubio (siglo I a.C.) sobre la aplicación de la sección áurea al ser humano. En el dibujo de Leonardo, el ombligo provoca la división áurea de la altura del hombre. El hecho de que este sistema de relaciones geométricas pudiera trasladarse a la figura humana tuvo una gran importancia en la ciencia y el arte renacentistas.

Las concepciones de la matemática en el mundo antiguo 2: Aristóteles y la axiomática clásica

Introducción a Aristóteles

Mientras Grecia, como señalábamos en el capítulo anterior, se debatía en conflictos armados destinados a dirimir la hegemonía en la región, el reino de Macedonia, al norte de la península, iniciaba una política de expansión que acabaría por dominar el mundo helénico. En 356 a.C. ascendió al trono el rey Filipo II, quien anexó las colonias griegas del sur hasta, finalmente, convertirse en regente de casi toda Grecia en 338 a.C. La ambición de Filipo era invadir Persia, pero fue asesinado dos años más tarde. Su hijo, Alejandro Magno, de veinte años, se convirtió en su sucesor y llevó a cabo los planes militares de su padre. Luego de la conquista de los territorios griegos, sus ejércitos avanzaron durante los siguientes diez años sobre Siria, Egipto, la Mesopotamia y de allí hasta el norte de la India, creando así un vasto imperio. Alejandro fomentó la fusión de distintos pueblos (de hecho esposó a una princesa persa) según los patrones de la Grecia clásica, de cuya cultura y logros, asimilados de su mentor juvenil Aristóteles, fue un admirador incondicional, respetando a la vez las creencias y realizaciones de los pueblos conquistados. Había comenzado una fertilización cruzada de Occidente y Oriente, el llamado *período helenístico* de la historia.

La expansión del imperio alejandrino se detuvo en el valle del Ganges pues las tropas, exhaustas, se negaron a seguir avanzando. Retornaron a la ciudad de Babilonia, y allí enfermó y murió Alejandro, en 323 a.C., cuando contaba sólo treinta y tres años de edad. Sus generales no supieron mantener la unidad imperial y el mundo helenístico se fragmentó en tres Estados. Sin embargo, el epicentro de la cultura de la época radicó en Alejandría, ciudad fundada a orillas del Nilo en 332 a.C. por el general macedonio Ptolomeo Soter a partir de un proyecto original del propio Alejandro. A la muerte de éste el fundador de la ciudad se convirtió en gobernador y luego, con el nombre de Ptolomeo I, en rey de Alejandría. Allí los ilustrados monarcas de su dinastía protegieron y subvencionaron a filósofos, científicos y artistas; el Museo y la Biblioteca alejandrinas se cuentan entre los mayores logros culturales del mundo antiguo. La matemática, en particular, como hemos de detallar en el capítulo próximo, llegó en Alejandría a su momento de mayor esplendor.

3

Las concepciones de la matemática en el mundo antiguo 2: Aristóteles y la axiomática clásica

Introducción a Aristóteles

Mientras Grecia, como señalábamos en el capítulo anterior, se debatía en conflictos armados destinados a dirimir la hegemonía en la región, el reino de Macedonia, al norte de la península, iniciaba una política de expansión que acabaría por dominar el mundo helénico. En 356 a.C. ascendió al trono el rey Filipo II, quien anexó las colonias griegas del sur hasta, finalmente, convertirse en regente de casi toda Grecia en 338 a.C. La ambición de Filipo era invadir Persia, pero fue asesinado dos años más tarde. Su hijo, Alejandro Magno, de veinte años, se convirtió en su sucesor y llevó a cabo los planes militares de su padre. Luego de la conquista de los territorios griegos, sus ejércitos avanzaron durante los siguientes diez años sobre Siria, Egipto, la Mesopotamia y de allí hasta el norte de la India, creando así un vasto imperio. Alejandro fomentó la fusión de distintos pueblos (de hecho esposó a una princesa persa) según los patrones de la Grecia clásica, de cuya cultura y logros, asimilados de su mentor juvenil Aristóteles, fue un admirador incondicional, respetando a la vez las creencias y realizaciones de los pueblos conquistados. Había comenzado una fertilización cruzada de Occidente y Oriente, el llamado *período helenístico* de la historia.

La expansión del imperio alejandrino se detuvo en el valle del Ganges pues las tropas, exhaustas, se negaron a seguir avanzando. Retornaron a la ciudad de Babilonia, y allí enfermó y murió Alejandro, en 323 a.C., cuando contaba sólo treinta y tres años de edad. Sus generales no supieron mantener la unidad imperial y el mundo helenístico se fragmentó en tres Estados. Sin embargo, el epicentro de la cultura de la época radicó en Alejandría, ciudad fundada a orillas del Nilo en 332 a.C. por el general macedonio Ptolomeo Sóter a partir de un proyecto original del propio Alejandro. A la muerte de éste el fundador de la ciudad se convirtió en gobernador y luego, con el nombre de Ptolomeo I, en rey de Alejandría. Allí los ilustrados monarcas de su dinastía protegieron y subvencionaron a filósofos, científicos y artistas; el Museo y la Biblioteca alejandrinas se cuentan entre los mayores logros culturales del mundo antiguo. La matemática, en particular, como hemos de detallar en el capítulo próximo, llegó en Alejandría a su momento de mayor esplendor.

Aristóteles (384-322 a.C.), testigo privilegiado de las consecuencias del derrumbe de la democracia ateniense y de la conformación del imperio alejandrino, fue el más importante de los discípulos de Platón, pero se independizó en buen grado, aunque no totalmente, de las concepciones de su maestro. Nació en Estagira, Macedonia, razón por la cual también es conocido en la historia de la ciencia y la filosofía como *el Estagirita*. Su padre había sido médico del rey Amintas II de Macedonia. A los 17 años de edad se trasladó a Atenas y estudió en la Academia de Platón, institución de la cual acabó siendo maestro. Permaneció allí durante veinte años. A la muerte de Platón (c. 347 a.C.) la dirección de la Academia fue encomendada a Espeusipo, un mediocre sobrino de su fundador, lo cual al parecer molestó a otros miembros de la institución, entre ellos Aristóteles, quienes decidieron abandonarla. Luego de un viaje por el Asia Menor, nuestro filósofo regresó a Macedonia, donde Filipo II le encomendó la educación de su hijo menor, quien habría de ser luego Alejandro Magno. Siete años después Alejandro fue coronado rey, pero Aristóteles no aceptó la invitación del nuevo monarca a acompañarlo en su expedición militar al Asia y regresó a Atenas, donde fundó su propia escuela: el *Liceo*. Allí se enseñaba lógica, teoría del conocimiento, cosmología, biología, ética, política y estética. Sus alumnos recibieron el nombre de *peripatéticos*, término que deriva quizás de la costumbre de Aristóteles de caminar (*peripatein*) mientras hablaba, o bien del paseo cubierto (*peripatos*) del Liceo en el que muchas veces se desarrollaban las discusiones de maestros y estudiantes mientras caminaban por él. Su nueva estadía en Atenas sólo duró doce años, pues a la muerte de Alejandro estalló en la ciudad un fuerte movimiento antimacedónico que lo volvió impopular. Sintiéndose un extranjero y temiendo por su vida, Aristóteles prefirió emigrar a Calcis, en la isla de Eubea, donde falleció poco después. En el año 300 a.C., Ptolomeo I convocó al peripatético Estratón, por entonces director del Liceo, para que se estableciese en Alejandría, y de este modo la actividad científica y filosófica propia del Liceo y el pensamiento de su fundador se trasladaron rápidamente a dicha ciudad. La historia de la filosofía occidental, en virtud de su vasta y trascendente obra escrita, le ha destinado a Aristóteles un papel de la más alta relevancia, sólo comparable al de su maestro Platón.

El pensamiento de Aristóteles es considerado por muchos historiadores de la filosofía, de la ciencia y de la cultura como verdaderamente un eslabón clave entre ideas un tanto asistemáticas o meramente animistas y una concepción del conocimiento científico y filosófico más cercana a la actual. Podemos encontrar en historiadores como Benjamin Farrington la idea de que la edad de la razón en Europa comenzó con Aristóteles, y también de que hay muchos aspectos en las concepciones aristotélicas que tuvieron continuidad hasta nuestros días, como de hecho las tienen. Como es sabido, en el siglo XIII europeo, autores cristianos como santo Tomás de Aquino intentaron sintetizar las ideas aristotélicas con las cristianas, dando lugar a la *filosofía escolástica*, y entre este sistema filosófico me-

dieval y los orígenes de la ciencia moderna, según autores como Alfred Whitehead, habría habido cierta continuidad. (Por entonces bastaba mencionar a *el Filósofo* y todos comprendían que se hablaba de Aristóteles.) Todo lo cual muestra que Aristóteles es sin duda un autor de primordial importancia y originalidad en la historia de la ciencia y la filosofía, y en particular en lo que respecta a la formulación de lo que debe ser el conocimiento científico.

Si bien este portentoso filósofo investigó en una asombrosa variedad de ámbitos del conocimiento, bastará citar solamente algunos de ellos que son pertinentes para los propósitos de este libro. Tendremos que dejar de lado, entre muchas otras, sus consideraciones sobre metafísica, cosmología, astronomía, meteorología, biología (disciplina de la cual es considerado fundador), ética, retórica, poética y política. La colección de libros denominada *Organon* (instrumento) muestra cuál es el pensamiento de Aristóteles respecto de la lógica, del lenguaje y de las distinciones de categorías que hay que tener en cuenta para fundamentar la ciencia, y en ellos también expone una teoría del razonamiento. El *Organon* está conformado por seis grupos de libros: *Categorías*, que se ocupa del problema de los tipos de entidades existentes; *Hermenéutica* (interpretación), donde se trata acerca del lenguaje y el significado; *Primeros Analíticos*, dedicado al problema de la deducción; *Segundos Analíticos*, en el que Aristóteles ofrece su concepción acerca de la ciencia; *Tópicos* y *Refutación a los sofistas*, destinados a analizar el problema de la discusión y la controversia, y sobre todo en el segundo libro, del problema de las falacias y de los errores de razonamiento.

En primer lugar, consideremos la geometría tal como la concibe Aristóteles. Este filósofo no se encuadra, a diferencia de Platón, en la tradición pitagórica respecto de las figuras geométricas, pues no acepta la existencia de un "segundo mundo". Aristóteles adopta el punto de vista, mucho más moderno, de que el espacio geométrico es real. No decimos que afirme que el espacio sea una mera abstracción de aspectos concretos de cuerpos, porque ello sería "modernizarlo" en exceso y transformarlo casi en un pensador del siglo XXI; pero sí afirma que el espacio y sus puntos son tan reales como todo aquello que percibimos y están en cierta relación con los cuerpos, de manera que el conocimiento de la geometría y el conocimiento de la física no es muy distinto en cuanto a la naturaleza del conocimiento: se trata, en último término, de conocer cómo es la realidad. La concepción aristotélica de la ciencia, de gran influencia en la historia filosófica occidental, está de por sí inspirada en la geometría y delata por ello mismo una posición determinada acerca de esta disciplina.

Quizás en este punto convenga aclarar las diferencias entre las *ideas* o *formas* de Platón y los *conceptos* de Aristóteles. Para Platón, las ideas están ontológicamente constituidas por objetos del segundo mundo, que existen en su mundo con total independencia de las cosas del primer mundo: existirían aunque en éste no las hubiese. Por ejemplo, para Platón, el "número 3" es una entidad que existe, eterna y nítida, en el segundo mundo, aunque no hubiera ternas

en el primer mundo, y existiria aun si no hubiese existido este mundo en el que estamos inmersos. Pero no es éste el pensamiento de Aristóteles. Las ideas, para Aristóteles, o, como él las llamaría, los *conceptos*, resultan de tener en cuenta ciertos aspectos de las cosas concretas del primer mundo platónico, el único existente. Estos aspectos se pueden encontrar repetitivamente (por lo cual podemos decir que el azul se encuentra en esta flor y en el cielo y en aquella tela), pero en cada una de tales ejemplificaciones se trata de un aspecto concreto de objetos concretos. Ello significa que *no* encontraríamos el azul si no existieran los objetos de color azul del primer mundo platónico, el que percibimos con nuestros sentidos. Por un acto de abstracción o de "separación" (como afirmaban los escolásticos medievales), es posible llegar a concebir un concepto separando de un ejemplo concreto todos sus aspectos *salvo* uno de ellos. Una flor azul tiene muchísimas características, pero si las ignoramos a excepción de su matiz, habremos accedido al *concepto* de azul. A éste lo podemos encontrar ejemplificado en otros objetos que, sin ser flores, lo posean[1].

La noción aristotélica de conocimiento

En cuanto al problema del conocimiento, Aristóteles hace una distinción importante entre un tipo de destreza tecnológica o artística en la que el conocimiento se adquiere por el mero ejercicio práctico de nuestras aptitudes de conocer (*techné*), y el verdadero conocimiento, el que está fundamentado (*episteme*). Este último sólo se alcanza en una etapa peculiar y final de un proceso de conocimiento, hoy denominado "método demostrativo aristotélico", y que Aristóteles expone especialmente en los *Segundos Analíticos*. Lo caracterizaremos reduciéndolo a un número relativamente pequeño de afirmaciones, con lo cual corremos el riesgo de distorsionar lo que en realidad es una rica colección de puntos de vista acerca de la naturaleza de las cosas y de la aptitud racional del ser humano para conocerlas.

El proceso de conocimiento, nos dice Aristóteles, debe dividirse en dos etapas. La primera es una serie de pasos a través de los cuales se va despertando nuestra aptitud de conocer y se sugieren posibles verdades generales o leyes acerca de lo real, incluyendo lo referente a sus aspectos matemáticos. Esta fase es de carácter empírico, observacional e inductivo, y podría ser caracterizada me-

1 La cuestión está expuesta desde otra perspectiva en la doctrina aristotélica que concibe a las entidades concretas como coparticipando de dos principios metafísicos igualmente reales: uno de ellos, activo, es la *forma*; el otro, pasivo, la *materia*. Estas nociones son particularmente importantes a la hora de explicar los cambios que se producen en el universo, pero no será necesario exponerlas aquí. El lector interesado hallará una breve síntesis de este aspecto de la filosofía de Aristóteles en Boido, G., *Noticias del planeta Tierra. Galileo Galilei y la revolución científica*, Buenos Aires, A-Z editora, 1996, pp. 28-30.

diante las siguientes tres recomendaciones: (1) observación de casos aislados de un fenómeno; (2) reiteración de la observación hasta disponer de una muestra considerable de casos; (3) generalización de lo observado en la muestra a todo el género o conjunto de entidades en estudio. Es muy interesante señalar que Aristóteles es el primero que habla de *inducción* y señala su papel esencial en el desarrollo de la ciencia. Ello permite comprender por qué muchos filósofos de tradición inductivista, como John Stuart Mill, lo señalan como el primer filósofo que emplea el método científico. Claro que Aristóteles obtiene de esta manera una presunta verdad, no una prueba de la misma. La inducción proporciona algo así como un tópico a investigar, origina el interés de decidir si la generalización obtenida de este modo es válida o no. Llegado a este punto, Aristóteles piensa que la justificación dependerá de la captación de la evidencia, de modo que la inducción es una suerte de mecanismo para despertarla. Pero en una segunda etapa la problemática se centra alrededor de los procedimientos mediante los cuales sería posible verificar las potenciales leyes científicas sugeridas en la primera etapa. Por el momento supondremos que se han insinuado ciertos enunciados científicos y el problema es cómo proceder a *verificarlos*, es decir, garantizar su verdad[2]. Y es aquí donde surge, en un sentido ya más técnico, el método demostrativo de Aristóteles. Los supuestos que enunciaremos a continuación se refieren específicamente a este problema, el de la prueba o verificación.

Caracterización de la ciencia según Aristóteles: el método demostrativo

Aristóteles da por sentados los siguientes supuestos:

(1) *Una ciencia C (la geometría, por caso) trata de un género determinado de objetos*

En el caso de la geometría podríamos pensar que C se ocupa de figuras geométricas. No hace falta aclarar en este momento si una figura es una abstracción de propiedades de los cuerpos, si es un sector del espacio que puede o no estar ocupado por los cuerpos, o es una entidad pitagórica, la que después habría de ser una forma o idea platónica. Pero es interesante señalar que, a juicio de Aristóteles, las figuras no intervienen en la investigación científica si se las

2 En este libro emplearemos las palabras "afirmación", "enunciado" y "proposición" como sinónimas, hecha la salvedad de que los lógicos y lingüistas no adoptan tal criterio. Es necesario destacar, por razones que serán de importancia en capítulos posteriores, que las proposiciones tienen significado o referencia, pretenden describir "algo que sucede", o bien, como se dice a veces, tienen *contenido semántico*.

entiende como sinónimos de "dibujos", pues no se razona acerca de ellos; a lo sumo, los dibujos pueden ser empleados como un recurso didáctico. A fin de evitar ambigüedades, aclaremos que en este libro nos referiremos a las figuras como peculiares porciones del espacio.

Aristóteles piensa que una ciencia comienza por ser definida por un tipo particular de entidades a las cuales se dirige la atención del científico. Esta concepción aristotélica toma como idea central o unidad de análisis de la ciencia la de *disciplina*; el conocimiento se divide en disciplinas distintas, como podrían serlo en la actualidad la matemática, la física, la química, la biología, la psicología y la sociología. Aristóteles cree incluso que hay tanta diferencia entre disciplinas distintas que no habría que confundir lo que se afirma en una de ellas con lo que se afirma en otra. No obstante lo cual, sin embargo, es claro que Aristóteles advierte algo común en todas las disciplinas: la manera en que se ordena el conocimiento. Pero alega también que en el curso de la investigación científica se caracterizan propiedades muy importantes de cierto tipo de objetos, y así la física se ocuparía de cuerpos materiales tales como un trozo de mármol, la geometría de porciones de espacio en general (líneas, ángulos, cubos), la química de ciertas transformaciones específicas de los cuerpos, la biología de los seres vivos y la psicología de seres que tienen cierto comportamiento o subjetividad, si se nos permite decirlo de este modo, y así sucesivamente. Hoy en día la noción de disciplina se ha transformado en algo bastante vago y sin fronteras, ya que es muy difícil, por no decir imposible, separar las fronteras de la física, de la química, de la biología y aun de parte de la psicología. La unidad de análisis de la ciencia es actualmente la *teoría científica*, y los debates se centran más bien en cuáles son las presuposiciones con las que las construimos y en qué medida ello mismo define la clase de entidades acerca de las cuales estamos hablando. Pero el mérito de Aristóteles, desde nuestro punto de vista, es haber pensado que quien usa el lenguaje de la ciencia se esta refiriendo a objetos *reales* y a sus propiedades, lo cual no es, en principio, nada obvio. Hay filósofos de la ciencia actuales de mucha significación para quienes el lenguaje científico no tiene ningún papel representativo, y piensan que, en realidad, la ciencia es un mero instrumento que se utiliza para obtener determinados resultados en la práctica o en materia tecnológica. Aristóteles por cierto no adheriría a esta última posición, y por ello está ubicado entre los filósofos *realistas*, para quienes *fuera* de las teorías científicas hay algo (la "realidad") representado por el lenguaje de aquéllas.

(2) *La ciencia C consiste en afirmaciones acerca de tales objetos*

Desde el punto de vista de nuestras concepciones modernas, ello podría ser un tanto objetable ya que, por ejemplo, hay en la actualidad una tendencia epistemológica que lleva a admitir que la ciencia es fundamentalmente el abordaje

de problemas y una práctica para resolverlos. Pero Aristóteles parece pensar, al caracterizar la ciencia, más bien en el *fruto* o *producto* de la práctica que se realiza para resolver los problemas, es decir, en lo que de esa actividad ha cristalizado en escritos y libros que permiten, en particular, transmitir y enseñar el conocimiento científico adquirido.

(3) *Las afirmaciones de C son verdaderas*

(4) *Las afirmaciones de C son generales*

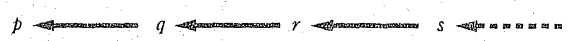
(5) *Las afirmaciones de C son necesarias*

Aclaremos estos puntos del pensamiento aristotélico suponiendo que estamos ante un texto de geometría. Aristóteles no aceptaría, en primer lugar, que en él hubiese afirmaciones falsas: diría que tienen que ser *verdaderas*. (Luego hemos de caracterizar su noción de "verdad".) Tampoco admitiría la presencia de afirmaciones particulares acerca de un determinado triángulo, como podría ser el caso de un terreno de forma triangular o de una escuadra de dibujante: toda propiedad que se predique de un triángulo ha de ser válida con generalidad para *todo* triángulo. Finalmente, diría que las afirmaciones del texto no pueden ser *contingentemente* generales, sino que su generalidad ha de ser *necesaria*, es decir, tener una "fuerza" especial que no le esté dada por la mera casualidad: lo que se afirma que sucede *no puede* suceder de otra manera. A veces en la naturaleza se advierten, en virtud de alguna casual distribución de las cosas, pautas o regularidades que no son necesarias sino contingentes. En cambio, los enunciados generales de la geometría (y de toda ciencia) siempre tienen la característica de que aquello que se afirma debe ser así y no puede dejar de serlo.

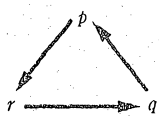
(6) *Las consecuencias lógicas de las afirmaciones de C también pertenecen a C*

Es bien sabido que, en un texto de geometría, si se hace una deducción a partir de enunciados ya admitidos, los enunciados que se obtienen también forman parte del texto. Hasta el momento hemos señalado qué tipo de afirmaciones se pueden aceptar en principio en el texto, pero ahora debemos considerar condiciones que involucran al carácter orgánico de una ciencia. Una de ellas, que se remonta al pensamiento de Tales, se refiere a la necesidad de utilizar el razonamiento lógico para poder fundamentar ciertas afirmaciones a partir de otras. Pero ése no puede ser el único criterio para admitir proposiciones científicas en el contexto de una teoría matemática, ya que entonces podríamos caer en regresos al infinito o en círculos viciosos. Supongamos tener una proposición p y que alguien afirmara que está probada, que es verdadera. Podríamos preguntar:

"¿y cómo lo sabemos?". De acuerdo con el sexto supuesto diríamos "porque lo hemos deducido de una verdad anterior, *q*". Nuevamente tendríamos el derecho de preguntar "¿y cómo se supo que *q* es verdadera?", y obtendríamos como respuesta "porque en su momento se la dedujo de *r*". "¿Y cómo se supo en su momento que *r* es verdadera?" "Porque en alguna ocasión se la pudo deducir de *s*, que es verdadera". Se comprende que si no hay otro procedimiento de prueba, este diálogo continuaría indefinidamente, y nos hallaríamos en presencia de lo que se denomina un "regreso al infinito", un continuo e indefinido posponer la prueba, desplazándola de cada etapa a una etapa anterior. Es como el caso de aquel personaje que pretendía pintar el techo, sin emplear escalera, colgándose de la brocha: en realidad no hay ningún punto que le pudiese servir de sustento. El regreso al infinito podría ser representado por medio del siguiente esquema, en donde el sentido de las flechas indica qué proposición, a la izquierda, se deduce de la inmediata anterior, a la derecha:



¿Habrá una salida alternativa para evitar el regreso al infinito? Podríamos imaginar, en lugar de la figura anterior, una disposición triangular de *p*, *q* y *r*. Si preguntamos, "¿cómo sabemos que *p* es verdadera?", la contestación podría ser: "porque la dedujimos de *q*". ¿Y cómo se sabe que *q* es verdadera? "Porque la dedujimos de *r*". ¿Y cómo se sabe que *r* es verdadera? "Porque la dedujimos de *p*". Efectivamente, asi hemos evitado el regreso al infinito porque está involucrado solamente un número finito de elementos; pero en cambio hemos obtenido un círculo vicioso que, con mayor propiedad en este caso, se denomina una "petición de principio". De hecho, *p*, que es lo dudoso, sirve de fundamentación a aquella proposición en la cual pretendemos basarnos para probar *p*.



En lógica, de lo falso puede deducirse lo falso, y en el triángulo vicioso que hemos dibujado podría muy bien suceder que *p*, *q* y *r* fuesen falsos, de manera que la argumentación anterior no constituye en modo alguno una prueba. Construyamos un ejemplo. En matemática, cuando se suma o se resta un mismo número a ambos miembros de una igualdad se obtiene otra igualdad. Supongamos que alguien afirmara que "1 = 2" es una proposición verdadera. ¿Có-

mo lo sabe? Porque, nos dice, se deduce de "2 = 3" restando 1 a cada miembro de la igualdad. Pero, ¿cómo sabe que "2 = 3"? Ah, responde tranquilamente, porque se deduce de "3 = 4" restando 1 a cada miembro de la igualdad. Pero, por Dios, ¿cómo sabe que "3 = 4"? Bueno, se deduce sumando 2 a cada miembro de la igualdad "1 = 2". Es evidente que los razonamientos son correctos, porque sumar o restar miembro a miembro es algo permitido para la matemática, pero las tres proposiciones son falsas.

Lo que acabamos de observar muestra claramente que, si sólo se dispusiese del criterio indicado en el sexto supuesto, podríamos encontrarnos con regresos al infinito o con peticiones de principio. Es notorio para Aristóteles que tiene que haber algún otro fundamento capaz de permitirnos verificar al menos *algunas* proposiciones de la ciencia, y entonces sí, a partir de allí tendríamos un sostén para obtener por deducción las restantes. Esto es lo que lleva a Aristóteles a admitir que unas pocas proposiciones de la disciplina científica que estamos tratando de fundamentar *no necesitan ser justificadas a partir de otras verdades*, ya que su simplicidad y su evidencia bastan para advertir que son verdaderas. Por tanto, piensa que es necesario aceptar lo siguiente:

(7) *(a) Existe un número finito de afirmaciones de C que se aceptan de por sí, los llamados* principios*; (b) las demás afirmaciones aceptadas, los* teoremas, *se deducen de aquéllas*

Aquí Aristóteles menciona distintas clases de principios, pero anticipemos desde ya que entre ellos se encuentran los *axiomas*, verdades que se autojustifican por su propia evidencia. Una *demostración* es una clase especial de deducción, la que se realiza a partir de axiomas, y cuya conclusión es, por tanto, un teorema. Por otra parte, la admisión de (7) responde la pregunta acerca de por qué aceptamos las afirmaciones de la ciencia y en particular de la geometría. La respuesta es que, en algunos casos, las aceptaremos en virtud de (a) y en otros en virtud de (b).

(8) *Los términos de C se clasifican en dos tipos: (a) términos* primitivos, *que se comprenden de por sí y que existen en número finito, y (b) términos* definidos, *que se definen a partir de los primitivos*

Este punto no se refiere a las afirmaciones mismas sino al vocabulario presente en una ciencia determinada. Aquí, tal como sucedía en el caso de los axiomas, Aristóteles advierte que, si se pretendiesen definir todos los términos, tendríamos nuevamente regresos al infinito o peticiones de principio, por lo cual estipula la existencia de términos no definidos, los *primitivos*, que conforman la "base" para definir otros, los *definidos*.

(9) *Para cada género de objetos hay a lo sumo una ciencia que trata acerca de ellos*

(10) *Las ciencias se jerarquizan en un orden que podemos llamar* metodológico

Consideremos ahora con cierto detenimiento lo que involucra cada uno de los aspectos de la ciencia según la concibe Aristóteles, tanto para su concepción de la matemática como para la de cualquier otra disciplina científica.

Comentarios a los supuestos aristotélicos acerca de la ciencia

Según (1), cada parte de la matemática tendrá que referirse a un determinado tipo genérico de objetos. Ello lo piensa Aristóteles de toda ciencia, y así dirá, como ya señalamos, que la biología se ocupa de los seres vivos o que la aritmética se ocupa de los números. Lo esencial es que, como Aristóteles admite que los géneros constituyen aspectos esenciales de las cosas que permiten comprender lo que son, la ciencia se conforma a través de la delimitación del género de objeto de que se trate. De manera que, en principio, deberíamos comenzar diciendo de *qué* estamos hablando; por ejemplo; en el caso de aritmética, tendríamos que decir que estudiamos los números. Aquí podríamos caer en la tentación de afirmar que todo consiste en ofrecer la *definición* de número; pero esa no es la idea de Aristóteles, pues, en virtud de (8), nos dice que podemos ocuparnos de este o aquel término sin que lo hayamos definido previamente. Basta que, de alguna manera, sepamos cuál es el género al que estamos haciendo referencia. Una palabra puede ser comprendida por su propia significación, sin que forzosamente ello implique que estemos en posesión de su definición.

A diferencia del punto anterior, que podríamos llamar *ontológico* pues está ligado a la primera pregunta que nos hemos formulado, es decir, cuál es la naturaleza de los objetos de la matemática, el (2) introduce la noción de que la ciencia entraña un *lenguaje*. Aristóteles se ocupa de ello en diferentes libros, tanto en *Metafísica* como en partes de *Categorías*, de *Hermenéutica* y de *Tópicos*. Para el punto (3) Aristóteles necesita una teoría de la verdad. Importa señalar desde ya que nuestro filósofo es el creador de lo que se suele llamar la "teoría semántica del lenguaje y de la verdad". Esto significa, como ya lo mencionamos anteriormente, que el lenguaje tiene valor referencial, que alude a cosas que son extralingüísticas, o bien, dicho de otro modo, que el lenguaje no se agota en sí mismo. Como analizaremos luego, ciertos filósofos de la matemática, los llamados *formalistas*, piensan de otro modo, pues entienden que los términos matemáticos se constituyen conceptualmente a partir del uso del lenguaje mismo sin presuponer nada extralingüístico: no tienen significado o referen-

cia. En cuanto a la cuestión de la verdad, Aristóteles piensa que las afirmaciones tienen la forma sujeto-predicado, y ofrece una definición de "verdad" que se refiere a los enunciados o proposiciones y que puede resumirse de este modo: "una proposición es verdadera si afirma, de lo que es, que *es*, o de lo que no es, que *no es*", mientras que "una proposición es falsa si afirma, de lo que es, que *no es*, o de lo que no es, que *es*". Este criterio, llamado *semántico* o *de adecuación*, nos dice en suma, expresado de una manera muy simple, que una afirmación es verdadera cuando existe correspondencia entre el presunto hecho que describe con el acaecer de tal hecho, mientras que es falsa si no existe tal correspondencia: la afirmación "en el tejado hay un gato" es verdadera si y solo si en el tejado hay un gato, y es falsa si y solo si en el tejado no hay ningún gato. De allí que al criterio de verdad de Aristóteles se lo llame también *correspondentista*. Aristóteles, como buen realista, piensa que las afirmaciones tienen un poder descriptivo de hechos y que serán verdaderas cuando los hechos descritos por ellas coincidan *en la realidad* con la descripción que el lenguaje nos ofrece. Para aceptar su noción de verdad debemos admitir que, más allá del lenguaje, hay cosas reales tales como tejados y gatos.

Con respecto a (4), acerca de la necesidad de que las afirmaciones de C deben ser generales, estamos en presencia de una condición realmente interesante, en particular cuando se aplica a la geometría. Porque aquí Aristóteles y la tradición aristotélica se apartan definitivamente de la tradición empirista primitiva y de gran parte de la tradición pitagórica y platónica, singularizada en la "observación" (por medio de la mente) de una entidad del segundo mundo. Lo que se intentará fundamentalmente es hacer afirmaciones generales acerca de todos los triángulos, de todos los cuadrados o de todos los círculos, de todas las rectas o de todas las paralelas, sin poner atención en lo singular. En este aspecto, Aristóteles es muy consecuente: en su teoría del silogismo no usa premisas singulares, porque considera que no forman parte del conocimiento científico. Por consiguiente, encontramos en el pensamiento aristotélico el problema de la expresión de la *generalidad* y del concepto de *ley*. Con Aristóteles se hace mucho más nítida la noción de que la ciencia debe informar acerca de leyes generales sobre los objetos que estudia. Aclaremos, sin embargo, que en la actualidad aceptamos como válidos enunciados científicos que son ciertamente singulares, del tipo "en el planeta Tierra hay dos polos magnéticos", o bien, en matemática, proposiciones existenciales tales como "existen números primos".

Con el punto (5), según el cual las afirmaciones de C son necesarias, se origina aquí la tradición según la cual los enunciados de la matemática son un tipo particular de verdad, las llamadas *verdades de razón*, que obtienen su "fuerza" de la razón misma y que por consiguiente no dependen de las vicisitudes de la contingencia empírica. Todo ello redunda en la convicción de que un cierto tipo de leyes, las *leyes formales*, tienen una certidumbre absoluta que otras leyes no tienen. Nadie diría que, de ser verdadera, "Todos los jugadores del equipo

de San Lorenzo de Almagro son tucumanos" es una proposición necesaria, sino que resulta de la constatación de una mera contingencia azarosa. Pero podría aducirse que "para cualquier par de puntos hay una recta, y solo una, que pasa por los dos puntos" es una proposición no circunstancial, sino inevitable, necesaria, es decir, que describe lo que no podría acaecer de otra manera.

La necesidad de una *lógica* aparece en el punto (6). Aquí Aristóteles plantea un principio metodológico realmente importante y que prácticamente sin modificaciones se ha transmitido a las concepciones modernas acerca de la ciencia, pues aparece en particular en el método axiomático de la matemática y en el método hipotético deductivo de las ciencias fácticas. La lógica ha de ser una disciplina que nos permita distinguir entre razonamientos *correctos* e *incorrectos*, donde el razonamiento correcto es el que garantiza la *conservación de la verdad* cuando transitamos de las premisas a la conclusión: si las premisas son verdaderas, la conclusión también debe serlo. (Es frecuente utilizar la palabra *deducción* para referirse a los razonamientos correctos; si bien puede haber "razonamientos incorrectos" no tiene sentido hablar de "deducciones incorrectas".) El punto (6) tiene que ser consecuente con el punto (3), en el sentido de que si aceptamos que las consecuencias lógicas de las afirmaciones de C también pertenecen a C, si las afirmaciones de C son verdaderas sus consecuencias también lo serán, puesto que pertenecen a C. Una pretendida lógica que no garantizara en el proceso de deducción la conservación de la verdad sería absolutamente inútil, de manera que el problema que se plantea aquí es cómo se puede conservar la verdad en el razonamiento mediante la deducción. Que Aristóteles haya logrado una respuesta con su notable análisis sistemático de la lógica lo hace merecedor del título de "padre de la lógica" con el cual se lo ha honrado, aun cuando aspectos de sus concepciones tuvieron que ser ampliados y reformulados en siglos muy posteriores.

El punto (7) es el que ofrece más dificultades. Indicaría que un número finito de afirmaciones de la geometría, los axiomas, tendrán que ser verdaderos por razones que pudiéramos llamar extralógicas (y por *lógica* entendemos estrechamente la teoría de la deducción). Y lo que se presenta naturalmente es la noción de que hay un tipo de justificación especial para esos enunciados, que habría de elucidar. Para Aristóteles parece ser claro que cuando una afirmación es muy simple y está construida de forma tal que el hecho al cual alude es *evidente* (en el sentido de que podemos captar su contenido porque se dirige directamente a las entidades consideradas, como la recta o el punto, es decir, aquello de lo que estamos hablando) hay un tipo de conocimiento inmediato o por intuición que permite garantizar verdades. Aquí parece ubicarse en una posición pitagórico-platónica más que en una vinculada con la generalización. Aceptado lo anterior, el resto del conocimiento tendrá que ser obtenido por la vía lógica.

Es muy interesante además advertir la palabra *finito* aplicado a la cantidad de axiomas. Esta finitud tiene seguramente una doble justificación; por una par-

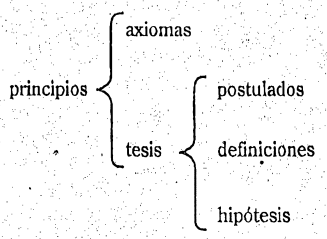
te, el llamado "horror al infinito" de los griegos; por otra, una cierta medida de prudencia de carácter metodológico bastante razonable. Para ilustrar el "horror al infinito", consideremos por ejemplo la sucesión (infinita) de los números naturales: 0, 1, 2, 3, 4, 5... En la medida en que los concibamos de este modo, diremos que los números naturales conforman un *infinito potencial*, en donde la infinitud consiste meramente en que, dada una sucesión *finita* de números, tal como 0, 1, 2, 3, siempre podemos agregar un número siguiente al último de la sucesión sumándole a éste el número *uno*. Pero, ¿es posible imaginarlos *como un todo*, de tal modo que la agrupación de todos los números naturales constituya una suerte de "objeto infinito"? En este segundo caso, diríamos que tal "objeto" es un *infinito actual*. Pero los griegos nunca lo concibieron como algo posible y por consiguiente menos todavía como punto de partida para la edificación de una ciencia. Aunque ya en el siglo XVII Galileo estableció con claridad la diferencia entre ambos "infinitos", el infinito actual en matemática sólo se aceptó, luego de grandes controversias, a fines del siglo XIX.

¿A qué nos referimos cuando mencionamos la "prudencia metodológica" de Aristóteles a propósito de que el número de axiomas debe ser finito? Si el conjunto de axiomas es finito, podría ser posible, en principio, que ante una determinada proposición, presunta "candidata a teorema", se pudiese establecer claramente que no hay una deducción de la misma a partir de los axiomas. Pero si hubiese infinitos axiomas, no habría otra forma de proceder más que por etapas, considerando, por ejemplo, los n primeros axiomas porque el número de premisas en un razonamiento tiene que ser finito. Si la proposición en cuestión se deduce de ellos, habremos mostrado que la misma es un teorema. Pero, ¿qué sucede en caso contrario? Habrá que tomar un número mayor de axiomas, m, y reiterar el procedimiento. Si aun así no obtenemos la proposición como teorema, habrá que considerar un nuevo número de axiomas, mayor que m, y podría suceder que este proceso, reiterado una y otra vez, empleando cada vez más axiomas, no nos permitiera llegar a la conclusión de que nuestra proposición es un teorema pero tampoco a la de que es un no-teorema. Como el número de axiomas es infinito, nos hallaríamos desde un comienzo en la incómoda eventual situación de no poder decidirlo.

Aun así, aunque aceptemos la finitud del número de axiomas, hay otro punto que merece ser destacado. Naturalmente, si escribimos un libro o desarrollamos una teoría científica convendría que supiésemos distinguir los teoremas de los no-teoremas. De otro modo correríamos el riesgo de introducir un no-teorema en el texto o la teoría. Aquí se presenta una complicación: ¿cómo se distingue un teorema de un no-teorema? Se trata de uno de los problemas fundamentales del método científico en matemática por cuanto está ligado a cuestiones deductivas de la índole de la que estamos discutiendo. A veces el procedimiento puede consistir simplemente en advertir que estamos en presencia de enunciados falsos: como los teoremas deben ser verdaderos en virtud de (6), si pudiésemos

mostrar su falsedad el problema estaría resuelto. Pero es preciso destacar que no forzosamente las verdades tienen que ser teoremas, de manera que bien podría caber la duda de que hubiera un no-teorema que fuera verdadero. No hay nada que lo impida. Aristóteles no dice nunca explícitamente que *todas* las verdades tienen que (o pueden) ser captadas por una determinada disciplina. Por otra parte se presenta un nuevo problema, pues podemos ignorar si un enunciado es falso porque no hemos tenido medios de encontrar un contraejemplo, y entonces nos preguntaríamos: "este enunciado, que no sabemos si es falso, ¿es teorema o no lo es?".

La nomenclatura aristotélica debe ser matizada con propósitos ulteriores que expondremos en el próximo capítulo a propósito de Euclides. Aristóteles piensa en realidad en dos tipos de puntos de partida o "principios" de una ciencia C: los ya mencionados *axiomas*, por una parte, y las *tesis*, por otra, que a su vez constan de *postulados*, *definiciones* e *hipótesis*. Cabe señalar que nuestro filósofo no es rigurosamente consecuente en cuanto a la nomenclatura que adopta (a veces llama "nociones comunes" o "principios" a los axiomas) por lo cual nuestra presentación es una suerte de reconstrucción didáctica de los "principios" aristotélicos.



Los axiomas, como ya señalamos, son precisamente los enunciados que, por su evidencia, exhiben su verdad, y se refieren a un tipo de verdad que necesariamente debe ser admitida en todas las disciplinas. Las tesis, en cambio, son principios aplicables exclusivamente a la disciplina de la que nos estamos ocupando. Los postulados, dice casi por única vez Aristóteles en un pasaje de los *Segundos Analíticos*, sin que esta idea sea analizada en detalle, son aquellos enunciados que admitimos como verdaderos porque sin ellos el resto de la ciencia no podría ser construida. Son verdades *menos evidentes* referentes a una disciplina pero que, pese a ello, debemos aceptar. Se trata de una afirmación extraordinaria. Si Aristóteles hubiera sacado más partido de la idea de que hay que admitir ciertos enunciados porque de otra manera es imposible desarrollar la ciencia, hubiera podido concebir lo que hoy se llama el "método hipotético deductivo", empleado en disciplinas fácticas como la física y la biología. Tal método,

como analizaremos luego, consiste en fundamentar una investigación en suposiciones o conjeturas (hipótesis) que son admitidas porque de otra manera no dispondríamos de procedimientos explicativos y predictivos inherentes a la tarea de investigación científica. Aristóteles no se explaya demasiado sobre este punto y no justifica cómo puede considerarse que el conocimiento científico llega a su mejor etapa y a la noción de prueba sobre la base de la admisión convencional, casi por razones oportunistas, de proposiciones que hay que admitir porque de otra manera no es posible la actividad científica. Pero es muy claro que Aristóteles privilegia en su metodología el papel de los axiomas, aquellos que se obtienen por intuición y tienen garantía absoluta de verdad.

Finalmente, entre las tesis, Aristóteles menciona las definiciones y las hipótesis, y es importante destacar que considera dos tipos de definición, la definición *real* y la definición *nominal*, si bien es mucho más explícito con relación a la primera. La definición real es siempre la definición de una entidad y consiste en señalar cuál es su esencia, mientras que la definición nominal se refiere a cuál es el significado con que nosotros utilizamos un término o una palabra. Quizás sea pertinente señalar que en la actualidad la definición real involucra el empleo de leyes científicas; si queremos comprender cuál es la "esencia" de una entidad o de un individuo tenemos que remitirnos a las leyes fundamentales de las teorías que los caracterizan. Una definición real de "agua" sería "el agua es H_2O", pero ello está mediado por la teoría química que incluye las leyes de composición molecular de la sustancia que denominamos *agua*. En cuanto a la definición nominal, Aristóteles piensa, a nuestro entender, que a veces el punto de partida de ciertas proposiciones científicas es también un determinado tipo de verdad evidente y racional, pero impuesta por la convención definitoria que ofrece el significado de una palabra. La verdad del punto de partida es una verdad de tipo lingüístico o semiótico, que se justifica por la imposición que supone el asignar a la palabra un determinado significado. No requiere, por tanto, de la intuición. Corresponde señalar además que, en el lenguaje que emplea Aristóteles, se discrimina entre la *definición*, aplicada a las características de alguna entidad, sin presuponer su existencia, y las *hipótesis*, que la justifican explícitamente. Pero no será necesario, para los propósitos de este libro, tratar acerca de esta distinción[3].

Indudablemente (7b) establece una diferencia que conviene recordar. Suponiendo que supiéramos qué es una deducción, es decir, un razonamiento correcto (para lo cual la lógica tiene que ofrecer los criterios formales para garantizar la conservación de la verdad en un razonamiento), hay que destacar que en realidad la lógica no prejuzga acerca del *status* en cuanto a verdad o falsedad de

3 Adviértase que el significado de la palabra "hipótesis", en Aristóteles, no debe ser confundido con el que hoy se le asigna en la metodología de las ciencias fácticas a la misma palabra, la cual, según ya señalamos, es sinónimo de "suposición" o "conjetura".

las premisas y de la conclusión. Es perfectamente posible que un razonamiento sea correcto aunque las premisas sean falsas y la conclusión también sea falsa. Por ejemplo: la deducción cuyas premisas son "$a = b$" y "$b = c$" conduce a la conclusión "$a = c$", y ésta es una forma de razonamiento correcta, pero "1 = 2" y "2 = 4" (falsas) nos lleva, en este ejemplo, a "1 = 4" (falsa). También es posible que las premisas sean falsas y la conclusión verdadera, y por supuesto también es posible que las premisas y la conclusión sean verdaderas. Dejamos que el lector imagine ejemplos similares al anterior. Lo único *prohibido* en materia de "corrección de un razonamiento" es que todas las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa. No se afirma que un razonamiento es correcto si tiene premisas y conclusión verdaderas, sino que la forma de razonamiento es tal que, *si podemos garantizar que las premisas son verdaderas*, la verdad de la conclusión también quedará garantizada. Pero la lógica nada tiene que ver con criterios para decidir si las premisas son o no verdaderas; ello es tarea de otras disciplinas. La proposición "1 = 2" es falsa porque así lo indica la aritmética y no por razones lógicas. Por otra parte, podemos aplicar la deducción a toda clase de enunciados: a conjeturas, a opiniones, a creencias o a afirmaciones inseguras (y así lo considera Aristóteles cuando habla de *razonamiento dialéctico*). Pero en el caso ya señalado de que una deducción *parte de axiomas como premisas*, entonces decimos que esta deducción es una *demostración*. De modo que una demostración es necesariamente una deducción, pero una deducción no es necesariamente una demostración. El principio de utilizar el razonamiento correcto en ciencia es una suerte de procedimiento de economía: nos obvia la necesidad de examinar proposición por proposición, por cuanto, si algunas ya han sido aceptadas como verdaderas, la vía lógica nos obliga también a aceptar la verdad de otras proposiciones sin tener que recurrir, para fundamentarlas, ni a la intuición ni a ningún otro procedimiento ajeno al razonamiento.

Con respecto al vocabulario, (8) se refiere a lo indicado anteriormente: no es necesario para comprender un término que lo hayamos previamente definido. Más aún, Aristóteles, por ejemplo cuando habla de la definición en su libro *Tópicos*, ni siquiera presupone que la definición sea un método didáctico para la aclaración de significados. La definición no es el único dador de significado. El significado puede estar proporcionado de alguna manera independiente, tal como sucedería, en el caso de la ciencia, con los términos primitivos, tema del que nos ocuparemos más adelante. Los demás términos, los definidos, adquirirían entonces su significado. Aquí la definición hay que entenderla en el sentido nominal, según el cual el significado de las nuevas palabras se obtendría a partir del significado de las ya empleadas. Efectivamente, si disponemos de una teoría de la definición, a partir de los términos primitivos "punto", "recta", "perpendicular", etc., podríamos definir "esfera", "cubo" o "paralelepípedo".

Es importante destacar también el punto (9), o sea la creencia de que no hay dos disciplinas distintas llamadas *geometría* para un mismo género de obje-

tos. Se advierte que (9) es el complemento o inverso de (1). Sobre ello vamos a encontrar después de Aristóteles un cambio importante tanto en las ciencias formales como en las ciencias fácticas. Así como la noción de *la* geometría, en singular, habrá de desaparecer, ocurrirá lo propio con la de *la* física. Porque, en matemática, la geometría será sustituida por los llamados "sistemas axiomáticos de la geometría", que son diversos, y en el caso de la física ocurrirá lo propio con los igualmente variados "sistemas hipotético deductivos de la física". La concepción aristotélica asimila naturalmente la noción de *disciplina* con la de una única *sistematización teórica* de ella. Aun cuando aceptáramos la existencia de una disciplina hoy llamada *mecánica*, que se ocupa del modo en que se comportan los cuerpos cuando se ejercen acciones sobre ellos, la historia de la ciencia nos muestra la existencia de diversas *teorías mecánicas*, cambiantes con el tiempo. Por otra parte, quienes fundamentaron la geometría advirtieron, por razones estilísticas o lógicas, que a veces será conveniente considerar como axiomas lo que otros tomarán como teoremas y viceversa. De manera que se presentaron, poco después de Aristóteles, algunas dudas acerca de si el modo de ordenar las proposiciones de una disciplina es único. Pero la posición aristotélica es clara: la ordenación de tales proposiciones no es mera cuestión de elegancia sino de que los axiomas cumplen un papel especial en cuanto a su evidencia, la razón de su verdad.

Finalmente, cabe comentar el punto (10). Si se piensa que los géneros, o sea las clases naturales de cosas, están jerarquizadas, las disciplinas lo estarán también y descansarán las unas en las otras. Si un género es parte de otro, la disciplina que corresponde a ese género sobreentenderá a la disciplina del otro y eso llevó a conformar una tradición según la cual habría algo así como una *pirámide de disciplinas*. Parecería ser que, admitiendo alguna clase de disciplina "suprema", en ella descansaría la geometría y la aritmética, sobre las cuales descansaría la física, y en ésta descansaría la química, y en ésta la biología, y así sucesivamente. Algo de ello sobrevive en la metodología científica contemporánea: la noción de *teoría subyacente* a otra, pero no en un sentido lineal y de dependencia absoluta, lo cual supondría que para desarrollar una rama de la ciencia tendríamos que conocer previamente y por completo cuáles son las teorías presupuestas. Sin embargo, en Aristóteles está la base de la creencia de que, como el concepto de "objeto físico" en cuanto a género parece ser un subgénero de "cuerpo ocupando extensión", la física sobreendendería a la geometría, por ejemplo, cuestión que hoy en día no resulta en modo alguno evidente.

En síntesis, de aquel primitivo empirismo de Ahmés que hemos considerado, en el que el *porqué* no está presente sino sólo el *cómo*, y el *cómo* de lo singular, hemos transitado con Aristóteles a concebir por primera vez un criterio explicativo y al mismo tiempo *fundamentativo* del conocimiento científico. ¿Por qué afirmamos esto último? Porque Aristóteles nos dice que la razón para creer en la verdad de ciertos enunciados se encuentra en su evidencia o en su demostración,

pero al mismo tiempo afirma que, una vez que sabemos que un teorema lo es, su verdad queda *explicada* por la demostración misma. Y éste es un punto más "fuerte" que el del pitagorismo o del platonismo, los cuales, en lugar de recurrir a la razón, se remitían solamente a la intuición.

En vista de lo anterior, si formuláramos a Aristóteles la primera pregunta que le hemos planteado a Ahmés o a Pitágoras, su contestación, según se desprende del libro llamado *Categorías*, sería que los objetos matemáticos son propiedades abstractas que expresan o generalizan propiedades o cualidades concretas de los objetos concretos. Esto es una cierta vuelta atrás, más cercana, por cierto, a Ahmés que a las posiciones pitagóricas, con la diferencia de que Aristóteles reconoce que existen *conceptos* abstractos (y no *objetos* abstractos), y que es necesario el concurso del pensamiento para ir más allá de los ejemplos particulares y llegar a regularidades y leyes generales. En cuanto a la segunda pregunta, afirma en los *Primeros Analíticos* y en los *Segundos Analíticos* que la fuente de la verdad de la matemática es la intuición racional, para los axiomas, y la utilización del método demostrativo y sus deducciones lógicas a partir de aquellos axiomas. Con respecto a la tercera pregunta, acerca de cómo se investiga en matemática, Aristóteles señalaría que los nuevos conocimientos se obtendrán a partir de nuevas experiencias, la práctica de la inducción como procedimiento "despertatorio", luego el ejercicio de la intuición para captar nuevas verdades evidentes y el uso de la lógica para deducir nuevas verdades a partir de las anteriores. Y a propósito de la cuarta pregunta, que abordaba la relación entre matemática y realidad, la contestación no diferiría mucho de la que ofrecía Ahmés. A través de la matemática conocemos las leyes o regularidades que conciernen a ciertos aspectos de la realidad, pues la disciplina atañe a la realidad misma e informa sobre ella.

Las limitaciones del método demostrativo o método axiomático clásico

El método demostrativo aristotélico tiene muchas analogías con los métodos actuales de investigación científica y con las concepciones contemporáneas de las teorías científicas. Pero su talón de Aquiles radica en que Aristóteles hace depender de una operación ajena a la experiencia la prueba verificativa de los axiomas, en la que cuenta sólo la evidencia, y el valor de su metodología queda ligado a la confianza que podamos tener en aquélla. En materia de captación de la evidencia, Aristóteles es tan intuicionista como lo era Platón o lo sería luego Kant. Admite la existencia de una facultad humana que puede, en virtud de las relaciones entre los significados involucrados en ciertos enunciados, autojustificar a éstos. Pero las críticas al intuicionismo platónico podrían ser aplicadas aquí. ¿Cómo sabemos que una evidencia no está perturbada, distorsionada y no

es meramente una seudoevidencia? Y podríamos también mostrar muchos casos históricos de evidencias que terminaron finalmente por convertirse lisa y llanamente en falsedades. De modo que, aun reconociendo la importancia y los aspectos acertados de la concepción aristotélica, llamada genéricamente *axiomática clásica*, debemos convenir en su invalidez como instrumento metodológico. Pese a ello, en el actualmente llamado *método axiomático formal* para la matemática mucho del espíritu aristotélico está, por así decir, reconstruido de una manera que lo hace más aceptable. En razón de estas similitudes, los sistemas deductivos que nos presenta Aristóteles suelen ser denominados *sistemas axiomáticos clásicos*, y su metodología demostrativa, *método axiomático clásico*.

En la historia de la ciencia y de la filosofía, se advierte que esta metodología ejerció una notable influencia, como lo prueba la síntesis y la fundamentación de la geometría realizada por Euclides pocas décadas después de la muerte de Aristóteles. Como analizaremos en el próximo capítulo, se origina aquí una tradición aristotélico-euclideana, y el hecho de que se dispusiera de semejante metodología debió dar mucha confianza en el intelecto humano. Todo ello fue beneficioso para el surgimiento de la ciencia moderna. Comprobamos, por ejemplo, que libros fundacionales de ésta, como buena parte de las *Consideraciones sobre dos nuevas ciencias*, de Galileo, o de los *Principios matemáticos de filosofía natural*, de Newton, adoptan la presentación aristotélico-euclideana para exponer las nuevas teorías físicas del siglo XVII. Esta tradición prosigue en el siglo XVIII, en el que se advierte la influencia de tal metodología en la fundamentación y reformulación de la mecánica realizada por Lagrange y Laplace. En el ámbito filosófico podríamos citar la *Ética* de Spinoza, ya mencionada, presentada a la manera demostrativa geométrica. Señalemos como último ejemplo el caso de la jurisprudencia, en la que comprobamos la existencia de teorías (como la del derecho constitucional), basadas en códigos y leyes que proporcionan enunciados a los que se consideran evidentes o necesarios, y que se completan con otros, admitidos como verdaderos pues se obtienen por deducción a partir de aquéllos.

Con la consideración de esta metodología hemos llegado al fin de una primera etapa en la historia de la matemática y de su fundamentación, que iniciáramos con el primitivo empirismo de Ahmés en el papiro Rhind y que culmina con el pensamiento de dos figuras señeras de la ciencia y la filosofía occidentales: Platón y Aristóteles. Pero como se ha dicho alguna vez, hay momentos en la historia de determinada ciencia en que todo se halla preparado a manera de vasto escenario para la aparición de algún protagonista de fuste que integra y reelabora todo el conocimiento de su época. En nuestro caso tal papel fue desempeñado por Euclides, el mayor sistematizador de la geometría de la antigüedad, cuyo libro imperecedero, los *Elementos*, es aún hoy uno de los mayores exponentes de la creatividad y el genio en materia científica.

4

La geometría de Euclides-Hilbert

Los *Elementos* de Euclides

Como señalábamos en el capítulo anterior, a la muerte de Aristóteles (322 a.C.) y a raíz de las conquistas de Alejandro Magno, el epicentro de la cultura mediterránea se trasladó a Alejandría. Este período *helenístico*, que abarca desde la muerte de Alejandro hasta la conversión de Egipto en provincia romana (30 a.C.), estuvo signado por la difusión de la cultura griega en Europa, el Cercano Oriente y parte de la India: el estilo de vida griego se extendió por esa amplia región del mundo. La ciencia alejandrina, que incorporó a su raíz griega concepciones y conocimientos de origen egipcio y mesopotámico, resultó menos filosófica y más cuantitativa que la del período clásico anterior. Los nombres más ilustres de la matemática antigua se vinculan con el primer siglo y medio de esta etapa histórica, entre 350 a.C. y 200 a.C.: Euclides, Arquímedes y Apolonio. Curiosamente, el mayor florecimiento de la matemática del período helenístico aconteció en Egipto y no en la Mesopotamia, a pesar de que el desarrollo de la disciplina había superado en mucho a la egipcia en épocas anteriores, lo cual puede ser explicado por la estratégica posición de Alejandría y las regiones vecinas del Mediterráneo. La cultura griega, allí, halló una nueva expresión y produjo la fusión de múltiples civilizaciones, tal como propugnaba Alejandro.

En la obra impar de Arquímedes (287-212 a.C.), nacido en Siracusa (Sicilia), se advierte el más alto nivel alcanzado por la matemática de la antigüedad. Aunque estudió en Alejandría, vivió gran parte de su vida en su ciudad natal, donde murió durante el saqueo de la ciudad por los romanos. Hijo de un astrónomo y amigo personal del rey siracusano Hierón II, Arquímedes escribió importantes obras sobre geometría plana y del espacio, aritmética y mecánica. No se ocupó de recopilar o reformular conocimientos anteriores sino que desarrolló técnicas matemáticas de absoluta originalidad. Con sus estudios de áreas y volúmenes de figuras sólidas curvadas y de áreas de figuras planas se anticipó a muchos de los descubrimientos de la matemática moderna. En el siglo XVII, Galileo habrá de llamarlo *el divino*. Arquímedes calculó las áreas y volúmenes de figuras obtenidas a partir de las cónicas (elipse, parábola e hipérbola) para lo cual empleó un nuevo método fundado en la consideración de secciones progresivamente

más pequeñas de tales figuras. Demostró, por caso, que el volumen de una esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro que la circunscribe y halló la fórmula para calcular la superficie de la elipse. Con él se inicia una tradición matemática que llevó, en el siglo XVII, por obra de Newton y Leibniz, a la creación del cálculo infinitesimal. Formuló la ley de la palanca y es conocido en particular por la ley hidrostática que hoy lleva su nombre. Se le atribuye la invención de ingeniosos mecanismos, como un tornillo hidráulico para elevar el agua, un planetario y diversas máquinas de guerra, razón por la cual durante casi dos milenios fue considerado el arquetipo del inventor e ingeniero, una suerte de legendario "mago mecánico". Sin embargo, Arquímedes nunca atribuyó importancia a sus invenciones técnicas en comparación con sus hallazgos teóricos, de los cuales, como hemos señalado, se destacan sus extraordinarios logros en matemática. E incluso cuando se ocupa de cuestiones pertinentes a la palanca y otras máquinas simples, o bien a la hidrostática, lo hace en búsqueda de principios generales, sin manifestar interés por vincularlos con aplicaciones prácticas[1]. Afortunadamente, subsisten muchas de sus obras, como *Sobre los cuerpos flotantes, Sobre el equilibrio de los planos, Sobre las espirales, Cuadratura de la parábola, El arenario y Sobre la esfera y el cilindro*. En cuanto al gran geómetra Apolonio, quien vivió durante los últimos años del siglo III a.C. y principios del siglo II a.C., redactó un memorable *Tratado de las cónicas*, compuesto por ocho libros (de los cuales sobreviven siete) que sirvieron de base para el estudio de estas curvas hasta el siglo XVII. Apolonio realizó otros aportes a la matemática e incluso a la astronomía; y por la índole de algunos de sus trabajos se lo considera hoy un precursor de la llamada "geometría analítica". Sin embargo, la mayoría de las obras de Apolonio se han perdido y sólo se las conoce por los comentarios que de ellas hicieron matemáticos posteriores.

Pero para los propósitos de este libro, nuestro personaje de mayor interés es el primero, en orden cronológico, de estos tres grandes protagonistas de la matemática alejandrina. Nos referimos a Euclides. Es bien poco lo que sabemos acerca de él, salvo que se hallaba en plena actividad hacia el año 300 a.C., y escribió un magno tratado de geometría, los *Elementos*, utilizado como libro de texto durante más de 2000 años y cuyos primeros capítulos, convenientemente modificados, constituyeron la base de la enseñanza de la geometría plana en las escuelas de todo el mundo. Se estima que, después de la Biblia, este libro fue el más reproducido y estudiado en la historia de Occidente. Por ello, podríamos citar aquí al historiador de la ciencia George Sarton, quien, ante la pregunta

1 Esta actitud de desprecio por las actividades e invenciones prácticas en comparación con los productos del pensamiento es característica de la época, y se encuentra fundamentada en obras de filósofos como Platón y Aristóteles. Las tareas que involucran el uso de las manos se asociaban con la condición infamante del esclavo y por ello sólo la "ciencia pura" (sin aplicación alguna a las necesidades humanas) era digna de consideración y estudio por los ciudadanos libres. Tal dicotomía "mente-mano" perdurará hasta el Renacimiento.

"¿quién fue Euclides?", responde sencillamente diciendo que fue "el autor de los *Elementos*". A ello podemos agregar algunos datos biográficos un tanto hipotéticos: probablemente estudió en Atenas con discípulos de Platón y enseñó geometría en Alejandría, donde fundó una escuela de matemática. Debió haber estado vinculado con el Museo y la Biblioteca, las dos grandes instituciones científicas alejandrinas. Se le han atribuido diversos libros, en particular sobre astronomía, óptica y música, pero algunas de estas adjudicaciones hoy se hallan en duda. Sin embargo, ningún historiador ha cuestionado su autoría de los *Elementos*, con excepción de algunos que aún creen que, al menos en parte, el libro pudo haber sido una obra colectiva. Cabe señalar, como información anecdótica, que el desconocimiento de los detalles de la vida de Euclides llevó en la Edad Media europea a identificarlo con Euclides de Megara, discípulo de Sócrates, e incluso a creer que Teón de Alejandría (editor de los *Elementos* a fines del siglo IV d.C.) había sido el verdadero autor de las demostraciones que contiene el célebre tratado: ¡Euclides se habría limitado a exponer los enunciados!

En los *Elementos*, Euclides recoge resultados de matemáticos anteriores, como Teetetos y Eudoxo, mencionados en el Capítulo 2 de este libro, si bien agrega diversos e importantes aportes personales a la teoría de los números, Ello muestra que estamos en presencia de un matemático que, si bien no fue por completo original, tampoco puede ser considerado un mero recopilador de conocimientos preexistentes. La trascendencia de su extraordinaria obra radica en la sistematización de toda la matemática de su época, propia y ajena. Los *Elementos* constan de trece libros: 1-6. *Geometría plana*; 7-10. *Teoría de los números*; 11-13. *Geometría del espacio*. Existen además dos libros apócrifos, 14 y 15, agregados con posterioridad por otros matemáticos en los siglos II a.C. y VI d.C. respectivamente.

La polémica acerca de si Euclides ha de ser considerado platónico o aristotélico ha hecho correr muchos ríos de tinta. En favor del primer punto de vista, sostenido en particular por el matemático ítalo-argentino Beppo Levi, puede esgrimirse el hecho de que en ninguna de las casi quinientas proposiciones que hallamos en los *Elementos* se mencionan aplicaciones prácticas, algo que hubiese complacido a Platón por el carácter de "conocimiento puro" que se advierte en la obra. O bien que Euclides sólo admite construcciones con rectas y circunferencias, sin referencia alguna a *instrumentos reales* (si bien, erróneamente, se suele afirmar que tales construcciones se realizan "con regla y compás")[2]. Sin

2 Según Platón, la circunferencia es la única figura "perfecta" de la geometría. Por otra parte, esta ciencia ha de estudiarse "para elevar el alma hacia la verdad" y no porque ofrezca aplicaciones a la astronomía, la agrimensura o la navegación. Desde luego, aunque Euclides no las mencione, la geometría euclideana tiene *innumerables* aplicaciones a los más diversos campos de la ciencia y de la técnica. Pero véase la nota 1 de este capítulo acerca de la dicotomía "mente-mano" en el mundo antiguo. Una difundida leyenda afirma que Euclides, ante la pregunta de un discípulo acerca de la utilidad práctica de la geometría, ordenó a su esclavo entregarle un óbolo a modo de "ganancia material" y lo expulsó de su escuela.

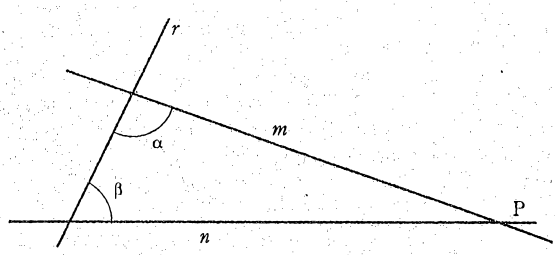
embargo, la metodología aristotélica aparece claramente en la sistematización que propone Euclides, e incluso, de acuerdo con ciertos historiadores de la matemática como Thomas Heath, los *Elementos* serían un ejemplo paradigmático del modo de pensar aristotélico. De hecho, las *definiciones*, los *postulados* y las *nociones comunes*, con los que Euclides comienza su libro corresponderían, con ciertas matizaciones, a similares "puntos de partida" empleados por Aristóteles. Por momentos Euclides es evidentemente platónico, pues está pensando en la figura geométrica como una entidad autónoma de por sí. Pero también habla de movimientos, de desplazamientos y hasta del transcurso del tiempo, y evidentemente allí se está refiriendo al espacio real, concreto. De todas maneras, la opinión de los historiadores de la ciencia es que no se puede desgajar con claridad cuál fue el propio pensamiento de Euclides a ese respecto y que en su obra conviven aspectos de las dos posiciones, la platónica y la aristotélica.

En cuanto a los aspectos deductivos de los *Elementos*, no son otros que los que concibe Aristóteles para que una ciencia pueda deducir sus teoremas. Pero este punto merece ser comentado. En el libro de Euclides, la metodología aristotélica no es respetada por completo. Por ejemplo, una diferencia manifiesta con el punto de vista de Aristóteles es que Euclides pretende definir *todos* los términos, y así, su libro comienza dando las definiciones de aquéllos que habrá de emplear: "punto es lo que no tiene partes"; "línea es una longitud sin anchura"; "superficie es aquello que sólo tiene longitud y anchura", "los extremos de una superficie son líneas", etcétera. Dicho de otro modo, en la metodología euclideana no hay términos primitivos, pues Euclides pretende que de la totalidad de los términos se ofrezca una definición.

Dado que los *Elementos* carecen de prólogo o introducción alguna y se inicia con las definiciones, se ha discutido mucho por qué Euclides decide proponerlas. Naturalmente, para decir "punto es aquello que no tiene partes" debemos tener la noción previa de "tener partes"; o bien, cuando afirmamos que "línea es una longitud sin anchura", tendríamos que tener definidos con anterioridad "longitud" y "anchura". La circularidad de estas "definiciones" es evidente. Una hipótesis histórica plausible es la siguiente: en la época de Euclides la geometría era una ciencia nueva, aparecía por primera vez sistematizada en calidad de ciencia racional, y los lectores de los *Elementos* podrían tener dificultades para comprender de qué se estaba hablando en el libro, sobre todo cuando se empleaban nociones muy abstractas. Por consiguiente, estas seudodefiniciones no serían más que aclaraciones didácticas o bien estarían destinadas a facilitar el proceso de *abstraer* las nociones empleadas a partir de la consideración de ejemplos concretos. Esto es algo así como aclarar, por medio de tales seudodefiniciones, el contexto en el cual se desarrollará la exposición posterior.

Las afirmaciones que Euclides llama *postulados* son suposiciones que debemos aceptar sin demostración y que conciernen a la geometría misma. Equivalen, aproximadamente, a los axiomas de Aristóteles, si bien nuestro geómetra no hace consideración filosófica alguna acerca de su evidencia y se limita a pe-

dir al lector que las admita. Son cinco en el primer libro. El primero se refiere a la determinación de la recta (entendida como una suerte de "segmento prolongable") por dos puntos, mientras que el segundo admite que es posible prolongar indefinidamente la recta. En el tercero se declara la existencia de circunferencias de cualquier centro y cualquier radio, y el cuarto se refiere a la igualdad de todos los ángulos rectos. El quinto postulado (cuya tempestuosa historia narraremos más adelante) es bastante más extenso y complejo, y su enunciado es: "Si una línea recta corta a otras dos de manera que la suma de los ángulos interiores de un mismo lado sea menor que dos ángulos rectos, entonces dichas rectas, prolongadas suficientemente, se cortarán del mismo lado de la primera línea recta en que se encuentren aquellos ángulos cuya suma es menor que dos rectos". En la figura, la recta r es cortada por las rectas m y n de tal modo que la suma de los ángulos interiores de un mismo lado, α y β, es menor que dos ángulos rectos; por tanto, m y n se cortarán del lado de la recta donde se hallan dichos ángulos (en el punto P).



Como lo hace en este caso y en muchos otros (por ejemplo, en el segundo postulado) Euclides suele mencionar la *prolongación* de una recta, lo que nos hace pensar que los griegos nunca concibieron a la recta como una entidad acabada sino *construible* por prolongaciones sucesivas. Aquí encontramos nuevamente el "horror al infinito" de los griegos que mencionábamos en el capítulo anterior. Por los métodos que emplea por ejemplo el matemático Eudoxo para medir y comparar segmentos, se tiene la impresión de que, efectivamente, pensaban en la obtención de los puntos de una recta como un proceso *potencial*. Si la recta hubiese sido concebida como una totalidad, es decir, si estuviese *actualmente* dada, ello implicaría admitir la existencia de un conjunto infinito de puntos, tal como se hace hoy. Ya señalamos en el capítulo anterior que la diferencia entre el infinito *potencial* y el infinito *actual*, original de Aristóteles, dará lugar en el siglo XIX a una importante controversia en la historia de la matemática.

El "horror al infinito" (actual) lo manifiesta también Aristóteles en materia cosmológica, pues su universo es concebido como finito, limitado por una esfera de estrellas fijas, más allá de la cual no sólo no hay materia sino tampoco espacio vacío. Si fuera cierto lo que hemos afirmado a propósito de la recta, concebida como algo no acabado, también resultaría una manifestación del "horror al infinito"

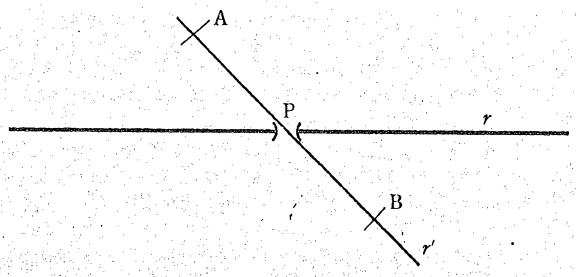
la imposibilidad de imaginar la existencia de infinitos puntos entre dos puntos de una recta. Como lo diría un matemático, lo que los griegos no pudieron concebir en este caso es la *densidad* de la recta, propiedad que establece, precisamente, que entre dos puntos cualesquiera de la misma existen infinitos otros.

Encontramos además en los *Elementos* las denominadas *nociones comunes*, que se aplican a todas las disciplinas (o al menos a ciertos grupos de disciplinas) y aquí aparecen enunciados tales como "cosas iguales a una tercera son iguales entre sí" o "si a cosas iguales se suman cosas iguales se obtienen cosas iguales". Es complicado saber en qué pensaba Euclides al introducir estos enunciados. Por ejemplo, Beppo Levi aduce, siguiendo a ciertos comentaristas, que son nociones *puramente geométricas*, que se refieren a la extensión de una figura geométrica, a lo que significa quitar o agregar figuras geométricas iguales a otras figuras geométricas, etcétera, pero no a entidades ajenas a la geometría. Y efectivamente es tentadora su interpretación porque se advierte que, si no se consideran estos enunciados como axiomas geométricos, con los axiomas mencionados anteriormente no basta para construir la geometría. A partir de allí, Euclides no demuestra "teoremas" sino que establece "proposiciones". Estas "proposiciones" son una mezcla un tanto extraña de problemas y al mismo tiempo de tesis afirmativas. Ello nos hace pensar que la ciencia, en este caso la geometría, emergió de problemas, y que sólo posteriormente, y a partir de esos problemas, forjó proposiciones. Así, por ejemplo, nos encontramos en los *Elementos* con enunciados tales como "sobre una recta dada limitada (segmento) construir un triángulo equilátero", problema cuya solución puede dar lugar a la siguiente reformulación: "sobre un segmento de recta siempre existe un triángulo equilátero". Por consiguiente, el método para construir dicho triángulo será el método para demostrar su existencia. Muchas proposiciones de Euclides son, en este sentido, especies de teoremas de existencia que se resuelven con una construcción, pero en algunos casos ello no ocurre. Por ejemplo, el teorema 29, que se refiere a la igualdad de los ángulos alternos internos entre paralelas cortadas por una transversal, es demostrado por Euclides directamente.

A fin de evitar confusiones, aclaramos que en la actualidad los términos *axioma* y *postulado* se emplean como sinónimos: se trata de suposiciones que aceptamos sin demostración y que conciernen a la geometría misma, la disciplina en estudio. Por tanto, y practicando un anacronismo basado en un uso extendido de la nomenclatura, de aquí en más diremos, sin posibles equívocos, que los puntos de partida de los razonamientos de Euclides constan de *definiciones*, *postulados* o *axiomas* y *nociones comunes*[3]. Así, es indistinto hablar del quinto postulado o del quinto axioma de Euclides: se trata del mismo enunciado.

3 Para contribuir al caos de nomenclatura, algunos traductores de Euclides llamaron *axiomas* a las nociones comunes. Pero nosotros ignoraremos esta circunstancia histórica, cuya consideración sólo serviría para confundir al lector.

En aquel entonces, alrededor del año 300 a.C., y a partir de allí, los *Elementos* de Euclides fueron considerados el *súmmum* de la exactitud y el rigor. Desde el punto de vista histórico sería anacrónico que se lo criticase porque es un libro incompleto, que tiene "lagunas", pues lo mismo podrá decirse dentro de algunos años de algunos textos actuales. Lo que ocurrió es que posteriormente, de manera gradual, se advirtió que los "ladrillos" proporcionados por Euclides eran insuficientes para construir todo el edificio de la geometría. Faltan postulados que permitan garantizar la verdad de ciertos enunciados y aparecen también afirmaciones no explicitadas que se presuponen a la hora de demostrar ciertos teoremas. Por ejemplo, se usa muchísimo en demostraciones de Euclides el que, si tenemos una recta r que divide al plano en dos semiplanos, tomamos un punto A que está en uno de los semiplanos y otro B en el opuesto, y unimos ambos puntos, la recta r' determinada por A y B corta a la recta r. Y este enunciado *no surge* de los axiomas. Si pensáramos en una especie de geometría, no imposible de ser concebida a partir de los postulados de Euclides, en donde las rectas tuvieran "agujeritos" en algunos lugares, podría suceder que la recta que una a los dos puntos, ubicados cada uno en distintos semiplanos, no cortasen a la recta que los separa. En la figura, supuesta la existencia de un "agujerito" en el punto P de la recta r, resultaría que r y r' no se cortan.



Del mismo modo, hay construcciones que en los *Elementos* no están justificadas, como el conocido procedimiento para construir un triángulo equilátero, dado el lado, por intersección de arcos de circunferencia de radio igual al lado. ¿Cómo sabemos que existe el punto de intersección? Además hace falta incorporar postulados respecto del ordenamiento de los puntos de una recta. De los axiomas de Euclides no surge siquiera que los puntos de una recta estén en un orden lineal. Por lo tanto, para que la geometría euclideana resulte completa, es necesario agregar o reformular postulados explícitamente. Determinar las "lagunas" en los *Elementos* supuso un proceso muy penoso de crítica metodológica, al que concurrieron una gran cantidad de geómetras del siglo XIX, especialmente alemanes e italianos como Moritz Pasch y Giuseppe Peano. Por lo cual hubo de esperarse a fines de dicho siglo para disponer de una "teoría euclideana completa", presentada por el gran matemático alemán David Hilbert en sus

Fundamentos de la geometría (1899). Con la reformulación de Hilbert se perfecciona la obra de Euclides agregándosele precisamente los axiomas de orden de los puntos de una recta, de continuidad y de congruencia, ausentes en los *Elementos*. De ahora en adelante cuando hablemos de geometría *euclideana* o *euclídea* nos referiremos a la versión de la misma reformulada por Hilbert. Ello no significa menoscabar la formidable obra de aquel antiguo matemático alejandrino, de quien afirma Sarton: "[Euclides] creó un monumento que, por su simetría, belleza interior y claridad, es tan maravilloso como el Partenón, pero incomparablemente más complejo y más duradero".

Coda: sobre la historia de la matemática

Desde el punto de vista de los objetivos de este libro, debemos tratar de inmediato, entonces, la reformulación de la geometría euclideana realizada por Hilbert, abandonando así la secuencia histórica que habíamos adoptado hasta ahora, pues entre Euclides y Hilbert transcurrieron más de dos milenios. Como es de imaginar, el desarrollo de la matemática en ese extenso lapso fue abrumador. Amén de las contribuciones de origen alejandrino inmediatamente posteriores a las de Euclides, Arquímedes y Apolonio, incluye los notables logros de la civilización árabe, desarrollada en épocas oscuras de una Europa sumida en la Edad Media, y los primeros trabajos originales de matemáticos europeos en los últimos siglos de ese período. El resurgimiento de la creación matemática en Occidente acontece durante el Renacimiento y se extiende a lo largo del siglo XVII, época brillante en la cual Europa ya se halla largamente a la vanguardia de los estudios matemáticos.

Luego de un período de transición que abarca la primera parte del siglo XVIII, durante la cual se desarrollaron las aplicaciones de la matemática a la mecánica y la astronomía, a mediados de dicho siglo y hasta la actualidad nos encontramos con el período de mayor creatividad en la historia de la disciplina. Señalemos dos notas principales que habrán de caracterizar a la matemática del siglo XIX. La primera está referida al gradual desarrollo de ramas de la misma que centran el interés de la investigación *en la matemática misma*, con independencia de que los resultados de tales estudios se prestasen o no a aplicaciones a otras ciencias. Empleando una nomenclatura que adoptaremos luego, se produce una acentuada distinción entre la matemática "pura" y la "aplicada". En opinión del historiador Dirk J. Strulk, la hallamos reflejada claramente en la obra del eminente científico alemán Cari Friedrich Gauss, quien practicó ambos tipos de matemática con plena conciencia de su diferencia y resultaría ser una figura de transición entre la matemática del siglo XVIII, esencialmente aplicada, y la del siglo siguiente. En segundo lugar, a lo largo del siglo XIX cobra cada vez más importancia el problema de fundamentar la matemática y dotarla de rigor metodológico, epistemológico y filosófico. De acuerdo con el matemático español

Julio Rey Pastor, nacionalizado argentino e introductor de la matemática moderna en nuestro país, se podría establecer la década de los años ochenta del siglo XIX como "frontera" entre una matemática clásica, empleada fructíferamente pero con un mínimo de fundamentación, y una matemática moderna que la exige.

Dado que este libro no pretende seguir los pasos sucesivos que conformaron a lo largo del tiempo la riqueza de la disciplina, de aquí en adelante nos limitaremos solamente a exponer algunos pocos rasgos biográficos de aquellos protagonistas cuya obra ha sido relevante para la filosofía y la fundamentación de la matemática. El lector interesado hallará en la bibliografía que incluimos en las páginas finales de esta obra referencias a textos que se ocupan específicamente de su desarrollo histórico.

La reformulación de Hilbert de la geometría euclideana

David Hilbert (1862-1943) nació en Königsberg (ciudad alemana hoy perteneciente a Rusia y cuyo nombre es Kaliningrado), en cuya universidad estudió y luego enseñó hasta 1895, cuando se trasladó a la Universidad de Gotinga y la convirtió en un centro matemático de notoriedad mundial. Allí falleció. Trabajó en muchísimos campos de la matemática, incluyendo la geometría, la teoría de números, el cálculo de variaciones, la teoría de las llamadas "ecuaciones integrales" y la lógica matemática. Su nombre figura en el desarrollo de casi todas las ramas de la matemática del siglo XX. En particular, su obra *Fundamentos de la geometría*, ya mencionada, es considerada hoy uno de los libros fundacionales de la matemática contemporánea. En la Conferencia Internacional de Matemática que tuvo lugar en París en 1900, Hilbert expuso 23 problemas que a su juicio podrían ser las metas de la investigación matemática a partir de allí. Estos problemas, de hecho, han estimulado gran parte de los trabajos realizados desde entonces, aunque no todos han sido resueltos. El pensamiento de Hilbert se hizo sentir no sólo en matemática sino también en filosofía, ya que fue uno de los autores que influyeron sobre el *empirismo lógico*, movimiento surgido en el seno del llamado Círculo de Viena en las décadas de los años veinte y treinta del siglo XX y al cual nos referiremos más adelante. Acerca de su obra ha escrito su colega francés Jean Dieudonné:

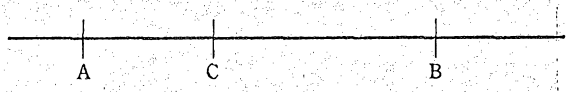
> Lo que asombra a primera vista en los trabajos de Hilbert es la belleza pura de su grandiosa arquitectura. No se trata de una impresión de "elegancia" superficial que resulta de cálculos hábilmente conducidos, sino de una satisfacción estética mucho más profunda que se desprende de la perfecta armonía entre el fin perseguido y los medios puestos en juego para alcanzarlo[4].

4 Dieudonné, J., *David Hilbert*, en F. Le Lionnais (comp.), *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, Buenos Aires, Eudeba, 1962, p. 313. (Original: 1948.)

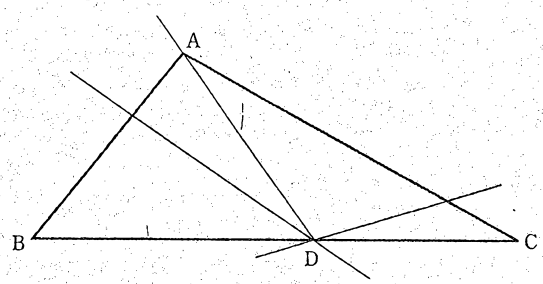
Cuando se formaliza adecuadamente la geometría, como lo hizo Hilbert, se obtienen cinco grupos de axiomas: ocho en el primero, cuatro en el segundo, cinco en el tercero, uno en el cuarto y dos en el quinto, es decir, en total, veinte axiomas. El primer grupo incluye los llamados *axiomas de enlace*, y en él se intenta vincular puntos, rectas y planos. Hilbert tiene una manera muy precisa de hablar, porque el método axiomático formal, que discutiremos luego, está en ciernes, y en él se necesita señalar cuáles son los conceptos o términos primitivos, es decir, aquellos que se considera imposibles de definir. Los cinco primeros conceptos primitivos, para Hilbert, son: "punto", "recta", "plano", "entre" y "congruente". Al sexto lo menciona con una nomenclatura extraña que es "corresponderse mutuamente": por ejemplo, el punto y la recta *se corresponden mutuamente*. Con ello Hilbert quiere decir que el punto pertenece a la recta o bien que la recta pasa por él, de modo que *corresponderse con*, *pasar por* y *pertenecer a* son intercambiables.

El primer axioma de enlace es: "dados dos puntos A y B existe una recta que pasa por ellos" (por lo cual A y B *pertenecen a ella*). El segundo: "dados dos puntos A y B, la recta que pasa por ellos es única". Los demás axiomas de este grupo son análogos; aseguran la existencia y unicidad de planos que pasan por tres puntos, la existencia de un punto fuera de una recta y así sucesivamente. Es interesante destacar el séptimo axioma, según el cual "si dos planos α y β tienen un punto A común, tienen al menos otro punto en común". Es decir que, si dos planos se cortan, se cortan en una recta. Esto es decir, en forma encubierta, que el espacio tiene tres dimensiones. Una de las grandes sorpresas cuando se estudia una geometría de cuatro dimensiones es el hallazgo de que en ésta los planos, si bien se pueden cortar, lo hacen en general en no más de un punto. Pero al decir del séptimo axioma de Hilbert, la geometría euclídea sólo trata con un espacio de tres dimensiones.

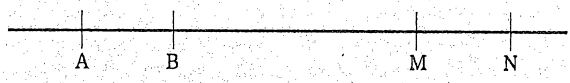
Los axiomas de enlace están seguidos inmediatamente por el segundo grupo, llamados de *ordenación*, también denominados *axiomas de Pasch*, y que toman *entre* como relación primitiva entre puntos. En particular, permiten introducir un *orden lineal* en la recta, que corresponde, intuitivamente, a la noción de "ir de izquierda a derecha". Hilbert ofrece aquí la definición de "segmento" con el recurso a la relación *entre*: "dados dos puntos A y B de una recta, el segmento AB está formado por todos los puntos que se hallan *entre* A y B" (donde A y B pertenecen al segmento). Por otra parte, se afirma que "dado un segmento cualquiera AC, existe un punto B tal que C está entre A y B". (Véase la figura.) A este enunciado se lo suele llamar *axioma de la prolongación de un segmento*.



Aquí se advierte la idea de Euclides de que una recta es indefinidamente prolongable, de que no es algo acabado, sino que, dado un segmento, éste puede prolongarse más allá de cualquier punto que se considere. En el tercer axioma se dice que "de tres puntos cualesquiera de una recta no hay más que uno situado entre los otros dos". El cuarto y último axioma de ordenación afirma lo siguiente: "si en un plano tenemos tres puntos A, B y C no alineados y una recta que tiene un punto común con la recta BC en un punto D ubicado entre B y C, forzosamente debe ocurrir que: o la recta pasa por A o por un punto entre A y C o por un punto entre B y A". (Véase la figura.)

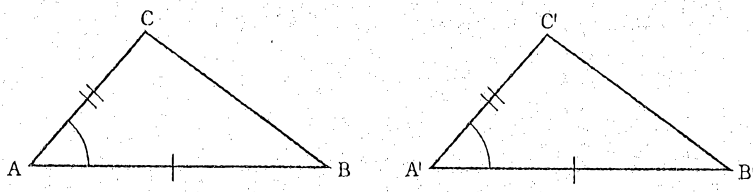


Cuando se llega al tercer grupo de axiomas, los *axiomas de congruencia*, ya han sido ofrecidas todas las definiciones de semirrecta, semiplano, ángulo, etcétera. En un sentido intuitivo, la congruencia de dos figuras en el espacio físico ordinario implicaría la posibilidad de superponerlas exactamente, pero Hilbert la introduce de manera más abstracta. El primer axioma dice lo siguiente: "si tenemos una semirrecta de origen A y un segmento cualquiera MN, existe un punto B y sólo uno en la semirrecta considerada, tal que AB es congruente con MN". Ello se indica AB ≡ MN, donde "≡" es el símbolo de la relación de congruencia. (Véase la figura.)



A este postulado se lo suele llamar *de transporte de segmentos*. Dice que siempre podemos construir en una semirrecta, en un sentido y a partir de un punto dado, un segmento que sea congruente con otro dado. Evidentemente, es un primer asomo de medición. A continuación Hilbert expone propiedades y operaciones relativas a la relación de congruencia, que permiten definir, por ejemplo, la "suma de segmentos". También se ocupa de la relación de congruencia entre ángulos, y ofrece un criterio de congruencia de triángulos: "si tenemos dos triángulos, ABC y A'B'C', y resulta que tienen un par de lados (AB

y A'B') congruentes, otro par de lados (AC y A'C') congruentes, y los ángulos comprendidos (A y A') congruentes, entonces el ángulo B es congruente con B'". (Véase la figura.) Naturalmente, por razones de simetría en el enunciado, también los ángulos C y C' serán congruentes. En la exposición Hilbert se detiene mucho aquí y obtiene una gran cantidad de conclusiones.



El cuarto grupo de axiomas al cual vamos a hacer referencia es en realidad el *quinto* de Hilbert. Hemos hecho esta alteración ya que, para evitar confusiones, preferimos ubicar en quinto lugar al cuarto axioma de Hilbert, que coincide (aunque con otra enunciación) con el quinto postulado de Euclides. Este último postulado, como hemos de analizar en el próximo capítulo, merece una consideración muy especial. Algunos temas de los que se ocupa Hilbert en este grupo de axiomas se refiere a cuestiones de *continuidad*, si bien el primero no tiene ese carácter. Es el llamado *axioma de Arquímedes*: dice que "si tenemos dos segmentos AB y CD en la semirrecta que parte de C y pasa por D, entonces existe un número natural *n* tal que, aplicando el postulado de transporte de segmentos *n* veces a CD, el segmento resultante es mayor que AB". (Dejamos al lector la tarea de construir la figura.) Expresado con mayor sencillez, lo que afirma el axioma de Arquímedes es que, dados dos segmentos, aunque el primero sea menor que el segundo, con tal de que al primero le vayamos sumando él mismo un número suficiente de veces sobrepasaremos al segundo. Ello es muy interesante porque existen ejemplos –incluso en ciertas geometrías– en donde este axioma no es válido, lo cual violenta la intuición[5].

En este grupo hay un segundo axioma: "el sistema de puntos de una recta es tal que no se lo puede ampliar con el agregado de nuevos puntos de modo que se sigan cumpliendo los axiomas anteriores" (en particular el de Arquíme-

5 Si el lector se ha tropezado ya con la matemática de Cantor o cantoriana, la matemática transfinita, no se sorprenderá tanto. En esta matemática, los llamados números transfinitos no cumplen el axioma de Arquímedes. Consideremos el primer número transfinito, y el número 3, un número que es menor que él; si a 3 se le suma 3, *n* veces, nunca llegaremos a infinito, por elevado que sea *n*. Por consiguiente la matemática de Cantor no es arquimedeana. Con este axioma de Hilbert, lo que se está prohibiendo son los números transfinitos para la medida de longitudes; es decir, que por reiteración *finita* de un segmento no podemos "obtener" toda una recta.

des). Dicho axioma, llamado *de plenitud*, ha generado muchas controversias porque tiene un carácter lógico especial, pero, dado que no es necesario aclararlo para nuestros propósitos, no nos ocuparemos de él.

Finalmente, el grupo quinto (que en la obra de Hilbert aparece como cuarto) está constituido por un solo axioma y es el comúnmente llamado *quinto postulado de Euclides* o *postulado de las paralelas*. Afirma que "por un punto exterior a una recta pasa una y solo una paralela a la recta dada". Aquí naturalmente el lector se podrá preguntar por qué éste es el quinto postulado de Euclides, enunciado anteriormente, ya que parece afirmar algo distinto. El enunciado que aparece en los *Elementos* se refiere a dos rectas cortadas por una transversal, a los ángulos internos de un mismo lado, etc., mientras que aquí se nos habla de rectas paralelas. Sin embargo, como analizaremos en el próximo capitulo, es posible demostrar que ambos enunciados son equivalentes, lo cual significa que, si se acepta uno de ellos, es posible demostrar el otro, y a la inversa, en conjunción en ambos casos con los primeros cuatro postulados euclideanos. Naturalmente, para poder enunciar el quinto postulado, "paralela" ha tenido que ser definida previamente. ¿Cuándo dos rectas son paralelas? Deben ser coplanares (estar en un mismo plano) y, o bien son coincidentes o bien no tienen puntos en común.

Examinando las propiedades de este sistema hilbertiano de axiomas y de lo que puede deducirse de él, disponemos de todo lo necesario para poder demostrar los resultados clásicos de la geometría de Euclides[6]. Se podría decir, aunque de modo provisional, que el sistema de Hilbert es *suficiente* para la geometría, en el sentido de que toda verdad geométrica parecería poder ser alcanzada mediante demostraciones a partir de estos axiomas. Por ello, como ya lo anticipamos, hablaremos de la "geometría de Euclides-Hilbert". Conviene finalmente señalar aquí que, si bien *Los fundamentos de la geometría* recopila muchos resultados previamente obtenidos por otros matemáticos, en particular de los ya mencionados Pasch y Peano, se considera actualmente que se trata de un texto cuya influencia en la concepción acerca de la geometría y de la naturaleza de la matemática fue decisiva. Pero ahora debemos remontarnos nuevamente a la época de Euclides y considerar las reflexiones que originó su obra en generaciones posteriores, en particular las fascinantes indagaciones motivadas por su "perturbador" quinto postulado y que culminaron, en el siglo XIX, con el surgimiento de las *geometrías no euclideanas*.

6 Cabe señalar que esta afirmación debe ser matizada, ya que la formulación de Hilbert no está exenta de imprecisiones, señaladas y subsanadas por matemáticos del siglo XX, asunto sobre el cual no entraremos en detalles.

5

El surgimiento de las geometrías no euclideanas

Las aventuras del quinto postulado: de Euclides a Gauss

Según el historiador Eric T. Bell, la aparición en el siglo XIX de las geometrías no euclideanas y del método axiomático formal conforman, en el ámbito de la matemática, una verdadera revolución científica, comparable a la que, en el campo de las ciencias naturales, llevaron a cabo Copérnico, Kepler, Galileo, Descartes y Newton. Todo ello fue el fin de un proceso histórico extraño y un tanto dramático que se originó en el propio Euclides y que vale la pena describir, pues, en principio, la cuestión podría parecer un tanto nimia. Nos recuerda lo que hoy suele ser llamado el "efecto mariposa", expresión empleada por los teóricos de la complejidad para señalar que el aletear de una mariposa en el oeste de los Estados Unidos podría provocar un terrible ciclón en el Mar Caribe. En nuestro caso, diríamos metafóricamente que Euclides provocó el aletear de una mariposa que más de 2 000 años después habría de generar un huracán en el pensamiento matemático.

Ke-

Nuestra historia comienza con algo extraño que sugiere el quinto postulado de Euclides. Carece de la simplicidad de los cuatro anteriores, su expresión gramatical es extensa y no parece inmediato o autoevidente. Recordémoslo: "Si una línea recta corta a otras dos de manera que la suma de los ángulos interiores de un mismo lado sea menor que dos ángulos rectos, entonces dichas rectas, prolongadas suficientemente, se cortarán del mismo lado de la primera línea recta en que se encuentren aquellos ángulos cuya suma es menor que dos rectos". Por lo demás, no es usado explícitamente por Euclides más que una vez, en el teorema 29 del primer libro de los *Elementos*, en el que se afirma que, si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, son iguales los ángulos alternos internos y también lo son los correspondientes, mientras que los internos de un mismo lado suman dos rectos. Lo curioso es que algunos teoremas anteriores al 29 (como el 16, según el cual un ángulo exterior a un triángulo es mayor que cualquiera de los interiores no adyacentes) hubiesen podido ser demostrados con mayor sencillez empleando el quinto postulado. Esto no significa que después del teorema 29 no se haga uso del postulado, pero sólo en forma indirecta, pues los teoremas que se demuestran luego emplearán, si es necesario,

dicho teorema 29. Pero llama la atención que Euclides haya colocado entre los postulados de su sistema uno que es usado explícitamente una sola vez, como si detrás subyaciese hacia él alguna aversión por parte del autor de los *Elementos*. Diríamos que todo sucede como si en una determinada religión encontráramos un dios de la lluvia, otro del fuego, un tercero de la tierra y un cuarto del mar, pero además un dios cuya finalidad específica es la de curarle un particular resfrío a un determinado rey. Una divinidad destinada exclusivamente a ello parece un tanto excesiva.

No hay duda, por tanto, que para el propio Euclides el famoso postulado era un tanto *sospechoso*. Ello mostraría, quizás, que las ideas aristotélicas de simplicidad y admisibilidad sin discusión a propósito de los axiomas no se las encuentra expresadas de una manera tan clara en el quinto como sí ocurre en los anteriores. Por haber adoptado una cierta actitud especial frente a este postulado se ha dicho a veces que el primer matemático no euclideano de la historia fue el propio Euclides[1]. Y si hay realmente razones para albergar tal *sospecha*, la idea que surgió prontamente en los matemáticos fue la de que quizás, puesto que al quinto postulado se lo necesita para construir la geometría, no estaríamos en presencia aquí de un auténtico postulado sino de un *teorema*. Dicho de otro modo: ¿es posible abandonar ese enunciado en tanto postulado y *demostrarlo* a partir de los postulados 1, 2, 3 y 4? Si así fuera, el enunciado se incorporaría al sistema euclideano como un teorema más.

Es comprensible, entonces, que ya en el siglo I a.C. el filósofo Posidonio haya intentado demostrar el enunciado sospechoso. Y lo logra... pero a costa de introducir en su lugar, como postulado, el siguiente: "dos rectas paralelas son equidistantes". En realidad se trata de un círculo vicioso, pues se puede demostrar que los postulados de Posidonio y de Euclides son lógicamente equivalentes, es decir que a partir de uno de ellos y de los cuatro primeros postulados euclideanos es posible demostrar el otro. Cabe citar también otro intento fallido del filósofo Gémino, contemporáneo de Posidonio. La cuestión volverá a reaparecer una y otra vez en los siglos siguientes. Así ocurrió con un importante intento de "demostrar" el quinto postulado por el ya mencionado filósofo medieval Proclo, comentador de Euclides, y a quien debemos los pocos datos biográficos que disponemos acerca del autor de los *Elementos*. Proclo menciona la existencia de muchas tentativas anteriores de demostración del quinto postulado a partir de los demás postulados del sistema, lo cual pone en evidencia que la implícita inquietud de Euclides fue seriamente recogida por los matemáticos y filósofos posteriores a él. Examinando los razonamientos de Proclo se comprueba que consigue demostrar el postulado 5 pero no utilizando solamen-

1 Una sorprendente anticipación del problema generado por el quinto postulado, según ciertos historiadores, se remontaría a Aristóteles. Véase Tóth, I., "Non-Euclidean Geometry before Euclid", *Scientific American*, noviembre 1969, pp. 87-98.

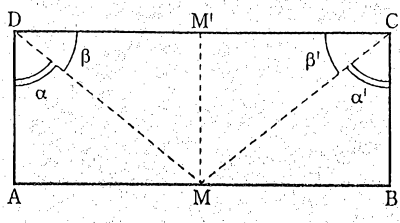
te los axiomas 1, 2, 3 y 4, sino una suposición más: "si una recta corta a una de dos paralelas, corta también a la otra". Nuevamente, se puede demostrar que este enunciado, considerado junto con los restantes axiomas, es lógicamente equivalente al quinto postulado, es decir que éste se cumple si y solo si se cumple el enunciado de Proclo. En la historia de la matemática árabe y sobre todo en la renacentista, se intentó muchas veces demostrar el postulado de Euclides, pero siempre a costa de admitir alguna suposición implícita equivalente al mismo. Por ejemplo, el matemático jesuita Cristóforo Clavius lo hizo a fines del siglo XVI a partir del enunciado "si tres puntos se hallan del mismo lado de una recta y son equidistantes de ella, los tres puntos pertenecen a una paralela a la dada", mientras que, ya en el siglo XVII, el inglés John Wallis "demostró" el inquietante postulado a partir de éste: "dado un triángulo cualquiera, existe uno semejante de magnitud arbitraria". De particular interés es el enunciado que adoptó el matemático inglés John Playfair (1748-1818), pues es el que se emplea habitualmente en los cursos de geometría: "por un punto exterior a una recta pasa una y solo una paralela a ella". Como recordará el lector, se trata del mismo enunciado que adoptó Hilbert en su reformulación de la geometría de Euclides. Se justifica así el llamar "postulado de las paralelas" al célebre quinto postulado.

Un punto culminante de la prehistoria de las geometrías no euclideanas llega en el momento en que el matemático y sacerdote jesuita Girolamo Saccheri (1667-1733) publica, el mismo año de su muerte, un libro en el que afirma haber demostrado finalmente el quinto postulado a partir de los anteriores[2]. Hombre de múltiples intereses, Saccheri fue profesor de Teología en un colegio jesuítico de Milán y posteriormente enseñó filosofía en Turín. Más tarde fue profesor de Matemática y Teología en la Universidad de Pavía. La genial idea de este matemático italiano, de consecuencias insospechadas, fue *tratar de demostrar el quinto postulado utilizando un razonamiento por el absurdo*. Su argumento es el siguiente: si aceptamos como verdaderos los postulados 1, 2, 3, 4 y además la verdad de la *negación* de 5, y de allí obtuviésemos una contradicción, ello significaría que el quinto postulado *debe ser verdadero*, lo cual bastaría para afirmar que es deducible de los anteriores, es decir, que es un teorema.

La contradicción podría consistir en la obtención, por deducción, de la negación de alguno de los primeros cuatro postulados o bien en la ya supuesta *negación* de la negación de 5, es decir, la afirmación de 5. En cualquier caso, el sistema deductivo de Saccheri incluiría un enunciado y su negación, y en ello consistiría el absurdo. Nuestro matemático procede a partir de una célebre figura, que en su honor es conocida hoy como "cuadrilátero de Saccheri", si bien

2 El título, en latín, *Euclides ab omni naevo vindicatus*, hace referencia al haber "liberado" (*vindicatus*) a Euclides de toda "falla", "defecto" o "mancha" (*naevus*). De allí que se lo suela traducir al castellano como *Euclides libre de toda mancha*.

ya había sido empleada por matemáticos árabes como Nasir Eddin Al-Tusi, del siglo XIII, cuyos trabajos, al parecer, ya conocía Saccheri, y también, anteriormente, por el poeta y matemático persa Omar Khayyam en el siglo XI[3].



Analicemos la construcción del cuadrilátero ABCD de Saccheri. Dado el segmento AB, se trazan por A y B segmentos iguales AD y BC perpendiculares a AB. Al unir D y C queda conformada la figura. Es sencillo probar ahora que los ángulos superiores D y C son iguales. Una demostración posible (hay otras) consiste en tomar M, punto medio de AB, unirlo con M', punto medio de DC, y finalmente unir el punto M con los vértices D y C. Entonces:

1. Los triángulos MDA y MCB son iguales. Efectivamente, por construcción, los ángulos A y B son rectos, y además AM = MB y AD = BC.

2. Los triángulos MM'D y MM'C son iguales. Por construcción, DM' = M'C, MM' es común y DM = MC por la igualdad de triángulos demostrada en [1].

3. De las igualdades de triángulos señaladas en [1] y [2] resulta que la suma de los ángulos α y β es igual a la suma de α' y β'; por tanto, como queríamos probar, son iguales los ángulos D y C.

Es importante señalar que todos los enunciados que se emplean en esta demostración, en particular los que se refieren a criterios de igualdad de triángulos, han sido demostrados *sin emplear el quinto postulado*. En particular, por caso, [3] resulta de la noción común de Euclides de que "si a cosas iguales se agregan cosas iguales se obtienen cosas iguales". Ahora bien, Saccheri ha probado la igualdad de los ángulos C y D, pero éstos, ¿son rectos, obtusos o agudos? Es necesa-

3 La argumentación de Omar Khayyam, similar a la de Saccheri, se expone en Dahan-Dalmedico, A. y Peiffer, J., *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*, Paris, Éditions du Seuil, 1986, p. 152. El lector interesado en los arduos razonamientos originales de Saccheri puede consultar el libro clásico de Roberto Bonola, *Geometrías no euclideanas*, Buenos Aires, Espasa-Calpe, 1945, cuya primera edición en italiano es de 1906.

rio contemplar los tres casos posibles por separado y, en todos ellos, tratar de arribar a la contradicción buscada.

En este punto el lector puede argumentar que C y D *deben* ser rectos porque la suma de los cuatro ángulos del cuadrilátero es igual a cuatro rectos, de modo que C + D = 2 rectos y, puesto que ambos son iguales, cada uno será igual a un recto. Pero sucede que dicha propiedad del cuadrilátero *presupone el quinto postulado de Euclides*; efectivamente, es una consecuencia inmediata del teorema que afirma que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos, el teorema 32 de los *Elementos*. Por tanto, Saccheri sólo se siente autorizado a obtener conclusiones a partir de los postulados 1, 2, 3 y 4, los cuales conducen a la igualdad de C y D, y no más. De allí que ahora nuestro matemático tratará de probar que, en cualquiera de los casos, sean C y D rectos, obtusos o agudos, se arribará a una contradicción; quedaría así demostrado que el quinto postulado *no es independiente de los cuatro anteriores y por tanto puede ser deducido a partir de ellos.*

Caso 1. *Los ángulos C y D son rectos.* De aquí Saccheri demuestra la verdad del quinto postulado, lo cual involucra una contradicción porque se ha aceptado desde un comienzo que dicho postulado es falso. Hasta ahora, todo parece marchar en el sentido de las intenciones de Saccheri.

Caso 2. *Los ángulos C y D son obtusos.* Nuevamente se presenta la contradicción, pues Saccheri arriba a la negación del postulado 2, que afirma que todo segmento de recta se puede prolongar en ambas direcciones. Dicho postulado debería ser a la vez verdadero y falso. Éste es el absurdo.

Pero al considerar el Caso 3, la suposición de que *los ángulos C y D son agudos*, comienzan para Saccheri las sorpresas, pues *no logra arribar a contradicción alguna.* Dicho de otro modo, al parecer, era posible deducir una serie de enunciados que se fundan en los postulados 1, 2, 3 y 4 *y en la negación del postulado de las paralelas* sin que ello condujese a contradicciones. De haber dado un paso más y aceptado sus propios desarrollos en el caso de los ángulos agudos, Saccheri hubiese sido el creador de la primera geometría no euclideana, es decir, una geometría que parte de los cuatro primeros postulados de Euclides y de la *negación* del quinto sin que ello implique ningún absurdo. Pero no lo hizo. Estaba convencido de que, finalmente, la contradicción aparecería, y que si tal cosa no ocurría era debido a sus propias limitaciones de matemático. Incluso, en cierto momento, creyó erróneamente haberla encontrado y se dio por satisfecho. Sin duda, el peso de la autoridad de Euclides incidió sobre este desenlace, y de hecho Saccheri escribió en su libro que la suposición de los ángulos agudos debía ser falsa porque en caso contrario las consecuencias que resultarían de ella "repugnarían a la naturaleza de la línea recta". Para emplear el lenguaje de ciertos epistemólogos actuales, podríamos decir que Saccheri nunca

pudo abandonar el "paradigma euclídeo" con el cual estaba firmemente comprometido. Sin embargo hay algo muy meritorio en la obra de Saccheri: la idea de encarar el análisis de este problema avanzando en una dirección "no euclideana" en los razonamientos geométricos y analizar sus consecuencias. Lamentablemente, el libro de Saccheri fue olvidado durante más de un siglo. Cabe señalar que en un trabajo del matemático alsaciano Johann Lambert se llegan a conclusiones similares a las de Saccheri, pero por desgracia, aunque fue escrito en 1766, no se publicó hasta principios del siglo XIX.

Aunque la obra de Saccheri no tuvo repercusión, los intentos de demostrar el quinto postulado por el absurdo se hicieron más frecuentes, pero los constantes fracasos llevaron al convencimiento de que el célebre enunciado era realmente independiente de los cuatro primeros y no un teorema deducible de ellos. A la vez, resultaba sorprendente que la afirmación de aquellos postulados junto con la negación del quinto no condujese a ninguna contradicción. Como afirmara a fines del siglo XVIII el matemático, filósofo y enciclopedista francés Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), "el problema de las paralelas es el escándalo de la geometría". Su colega ítalo-francés Joseph Louis Lagrange (1736-1813), según se cuenta, interrumpió una lectura sobre el tema en la Academia de Ciencias de Francia diciendo: "tengo que pensarlo mejor".

La historia del quinto postulado habría de dar un giro inesperado a principios del siglo XIX. Cronológicamente, el mérito inicial es atribuible al notable científico alemán, ya mencionado, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), llamado el *príncipe de los matemáticos*. Hijo de un modesto albañil, Gauss nació en Braunschweig, ciudad situada en la Baja Sajonia, y estudió en la Universidad de Gotinga desde 1795 hasta 1798 gracias a la protección del duque de Brunswick. Inclinado en un comienzo por la filología, optó finalmente por la investigación matemática. Se doctoró en 1799 en la Universidad de Helmstedt. En 1807 fue nombrado profesor de matemática y director del observatorio de Gotinga, y ocupó ambos cargos hasta su muerte, acontecida en esa ciudad. Su imponente y original producción abarca amplios campos de la matemática, pero también de la física (magnetismo, óptica, electricidad) y de la astronomía.

Gauss formó parte de un pequeño grupo de matemáticos que tuvieron la firme sospecha de que el postulado de las paralelas es indemostrable a partir de los cuatro anteriores y que es posible obtener nuevas conclusiones, sin hallar contradicción alguna, admitiendo dichos cuatro postulados y la *negación* del quinto. Entre 1832 y 1833, el matemático húngaro Wolfgang [Farkas] Bolyai publicó un tratado de geometría en dos volúmenes que incluía un apéndice redactado por su hijo Johann [János], "Ciencia absoluta del espacio"; en éste se desarrollaba una "nueva geometría" basada en los cuatro primeros postulados de Euclides y en la sustitución del quinto por el siguiente: "por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela a la misma". Diez años antes, Johann había escrito a su padre: "Estoy decidido ahora a publicar una obra sobre la teoría de las paralelas [...]. He descubierto cosas tan hermosas que me he queda-

do sorprendido con ellas. [...] *He creado de la nada un nuevo universo*". Wolfgang envió copia del trabajo de su hijo a su ex condiscípulo, Gauss, cuya trascendencia y fama eran ya notorias. Para su sorpresa, recibió la siguiente respuesta:

> Si empiezo diciendo que no puedo elogiar este trabajo tú quedarás, ciertamente, por un instante maravillado; pero no puedo decir otra cosa; alabarlo sería alabarme a mí mismo. En efecto, todo el contenido de la obra, el camino trazado por tu hijo, los resultados a que llegó coinciden casi enteramente con mis meditaciones, que han ocupado en parte mi mente de treinta a treinta y cinco años a esta parte. Así, me quedé completamente estupefacto. En cuanto a mi trabajo personal, del cual, hasta aquí, he confiado bien poco al papel, era mi intención no dejar que se publicase nada durante mi vida. En efecto, la mayor parte de los hombres no tienen ideas claras sobre las cuestiones de que se habla, y yo he encontrado muy pocas personas que prestasen un especial interés a lo que les comuniqué sobre tal asunto. [...] Y así es para mí una agradable sorpresa ver que esta fatiga puede serme evitada ahora, y estoy sumamente contento de que sea precisamente el hijo de un viejo amigo quien me haya precedido de un modo tan notable[4].

La digna respuesta de Gauss, ajeno a cuestiones de prioridad que han sido moneda corriente en la historia de la ciencia, implicaba que él mismo había desarrollado una geometría similar a la de Johann Bolyai, pero que nada había publicado acerca de ella por temor a que sus colegas la consideraran el resultado de una elucubración insensata digna de un excéntrico. Efectivamente, como lo prueban sus manuscritos inéditos, analizados después de su muerte, Gauss había comenzado a estudiar el problema hacia 1792, y llegado luego a la conclusión de que era posible concebir una nueva geometría a partir de la negación del quinto postulado. Se sabe que a partir de 1813, como lo testimonia un documento, Gauss había desarrollado "una extraña geometría, totalmente distinta de la nuestra [...] enteramente consecuente [desde el punto de vista lógico]". Todo ello lo explicaba también a su amigo Franz Taurinus en una carta de 1824. Posteriormente, en 1829, dio a conocer su nueva geometría en un mensaje privado al matemático y astrónomo Friedrich Bessel, ratificándole que no pensaba publicarla "por temor al griterío de los beocios". Lo cierto es que, al parecer, Gauss estaba al tanto de intentos semejantes por parte de otros matemáticos, a los cuales alentó para que prosiguieran investigando en esa dirección. Sin embargo, Johann Bolyai, irritado ante la posibilidad de que Gauss pretendiese alzarse con los méritos de su obra y ante la falta de reconocimiento de

4 Carta de Gauss a Wolfgang Bolyai del 6 de marzo de 1832. Citado por Bonola, R., *Op. cit.*, pp. 104-105.

ésta, dejó de publicar sobre el tema, actitud que se vio fortalecida por otra circunstancia: la aparición de otro creador de una geometría no euclideana, quien a la postre habría de llevarse los honores por el descubrimiento de ella.

Efectivamente, el matemático ruso Nikolai Lobachevsky, orientado por un amigo de Gauss, había presentado en 1826 una memoria en francés a la Universidad de Kazán, inexplicablemente perdida por la Sociedad Fisicomatemática de esa ciudad, en donde exponía una geometría semejante a la de Johann Bolyai. A ella agregó nuevas publicaciones sobre el tema, entre 1830 y 1840, y su importante libro, de este último año, *Investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas*, contribución que, por recomendación de Gauss, le permitió acceder en 1842 a la Sociedad de Ciencias de Gotinga. Con Gauss, Bolyai y Lobachevsky surgía por primera vez en la historia una variedad de geometría no euclideana, hoy llamada *hiperbólica*, y que se corresponde con la suposición de los ángulos agudos de Saccheri[5]. En un principio, ella fue considerada con reticencia por otros matemáticos y, en particular, a la geometría de Lobachevsky se la tildó de "caricatura geométrica" y "manifestación morbosa de la geometría". Una buena razón que explica la resistencia a admitir otras geometrías distintas de la euclídea se puede hallar en la vigencia que tenía por entonces el pensamiento filosófico de Kant, para quien la euclídea era la única y verdadera geometría ya que se corresponde con lo que el ser humano puede captar intuitivamente[6]. Ello merece que dediquemos a los puntos de vista de Kant una consideración más detenida.

El apriorismo de Kant

Immanuel Kant (1724-1804), filósofo alemán considerado como uno de los pensadores más importantes de la época moderna, nació y murió en Königsberg, en cuya universidad estudió principalmente ciencias naturales y matemática. Desde 1755, año en que recibió su doctorado, enseñó allí dichas disciplinas y luego casi todas las ramas de la filosofía. Durante este periodo adquirió cier-

5 Advierta el lector que tanto Gauss como Bolyai y Lobachevsky presuponen que por un punto exterior a una recta pasa *más de una paralela* a ella. Si se admite la validez de los postulados 1, 2, 3 y 4, ésta es la única forma de *negar* el quinto postulado. En efecto, a partir de ellos, es posible demostrar que por el punto pasa *al menos una paralela*, y la disyuntiva es entonces decidir si pasa *sólo una* o bien *más de una*. La geometría no euclideana que se obtiene negando que por el punto *pase paralela alguna*, que corresponde a la hipótesis de los ángulos obtusos de Saccheri, fue desarrollada posteriormente por el matemático Bernhard Riemann, según hemos de señalar más adelante. Pero esta suposición es incompatible con el segundo postulado de Euclides, de modo que es imposible afirmar que por el punto no pase ninguna paralela sin negar, a la vez, dicho postulado.

6 Curiosamente, Kant es un tanto prudente al exponer estas ideas, pues admite que ello se refiere solamente a la naturaleza del ser humano; acepta que algún otro posible ser racional podría valerse de una geometría diferente.

ta reputación como filósofo original, si bien no se le concedió una cátedra hasta 1770, cuando se lo designó profesor de Lógica y Metafísica. De allí en más vivió dedicado a escribir y a ejercer su actividad docente. Hombre de gran integridad moral y perseverancia en sus estudios, adhirió a los ideales de la Revolución Francesa y fue un declarado pacifista. Algunos de sus libros, *Crítica de la razón pura* (1781), *Prolegómenos a toda metafísica futura* (1783), *Crítica de la razón práctica* (1788), *Crítica del juicio* (1790) y *La metafísica de las costumbres* (1797), son considerados hoy como clásicos de la moderna filosofía occidental.

La teoría kantiana del conocimiento tiene aspectos en común con la de la tradición pitagórico-platónica, por cuanto Kant también acepta la *intuición*, en particular, como fuente de conocimiento matemático. Pero este filósofo indicaría que los objetos matemáticos, en realidad, corresponden a construcciones o elementos de carácter psicológico de los que disponemos, por nuestra naturaleza, como instrumentos para poder imponer orden y sistematicidad a los fenómenos y tratar biológicamente con ellos. Para Kant, la geometría es una forma de sistematizar los fenómenos. Podemos concebir al espacio como un "objeto", pero éste, si se nos permite la metáfora, sería más semejante a un anaquel que a uno de los objetos que lo ocupa. Parece ser un dispositivo mediante el cual se pueden ubicar las entidades y, por consiguiente, al igual que los libros en una biblioteca, encontrarlas y utilizarlas cuando se las requiera. Lo mismo ocurre con los números, que estarían indisolublemente ligados a nuestra intuición del tiempo, y hay que recordar que el tiempo, al igual que el espacio, es también, según Kant, una de las formas estructurales preimpuestas a nuestra experiencia para tratar con ellas.

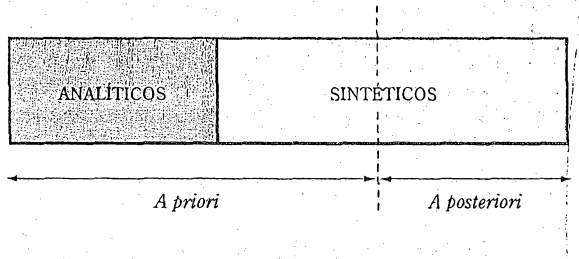
Los verdaderos objetos reales, los *noúmenos*, son para Kant incognoscibles, porque la única información que tenemos son los fenómenos mismos, y éstos son algo así como manifestaciones indirectas de los verdaderos objetos. Para colmo, ellos están sistematizados, conceptuados y esquematizados según nuestro aparato perceptual y nuestro sistema categorial, el sistema que proporciona los conceptos mediante los cuales los fenómenos son esquematizados conformando objetos físicos. Los "objetos físicos" no corresponden a nada externo al sujeto cognoscente, sino que son construcciones realizadas por nosotros a partir de los fenómenos que percibimos.

Kant presenta una distinción crucial entre proposiciones *analíticas* y proposiciones *sintéticas*. La importancia de esta discriminación es que las proposiciones de la ciencia de las cuales queremos dar cuenta se dividen entre aquéllas cuya verdad es necesaria por razones lingüísticas o conceptuales ligadas a la definición de los conceptos que estamos usando (*analíticas*) y otras que relacionan entidades o aspectos que no están en sí mismo forzosamente relacionadas y tienen contenido fáctico (*sintéticas*). Si se define "pájaro" como un animal vertebrado, no mamífero, que tiene alas y vuela, etcétera, entonces el enunciado "todos los pájaros son animales" será un enunciado analítico. En cambio, "en el jardín de mi casa suele haber pájaros" tiene contenido fáctico, va más allá de la significación

de los términos involucrados y nos dice algo acerca del mundo; será por tanto un enunciado sintético. Esta distinción tiene, por tanto, un carácter lógico.

Por otra parte, según Kant, las verdades matemáticas se nos imponen con una fuerza y necesidad que no poseen, por cierto, las verdades cuya fuente se encuentra en la experiencia. Se trata de lo que Kant denomina "verdades *a priori*", para distinguirlas de las "verdades *a posteriori*" que sólo la experiencia nos permite obtener. Las verdades *a priori* se originan en la peculiar estructura que posee nuestro aparato psíquico como condición preimpuesta para la sistematización de nuestras percepciones de los fenómenos. Esta distinción es de carácter epistemológico, pues se refiere a dos modos distintos de acceder al conocimiento. Para Kant, las verdades *a priori* llegan a nuestro conocimiento sugeridas por la experiencia. Pero esto no implica que la experiencia sea aquí un elemento justificativo; más bien ese papel sería "despertatorio" en el sentido en que introdujimos esta palabra al hablar de Platón. La justificación del *a priori* será siempre la intuición intelectual sustentada por nuestro aparato perceptual o categorial.

Las proposiciones, en suma, podrán ser analíticas o sintéticas, o bien *a priori* o *a posteriori*, de acuerdo con lo cual tendríamos en principio cuatro clases de proposiciones: analíticas *a priori*, analíticas *a posteriori*, sintéticas *a priori* y sintéticas *a posteriori*. Pero no pueden existir enunciados analíticos *a posteriori*, porque si un juicio analítico tal como "todos los pájaros son animales" repite en el predicado lo que implícitamente se dice en el sujeto, es evidente que podemos garantizar su verdad porque es tautológica o trivial, y está en realidad, parcial o totalmente, incluyendo en el predicado la significación que tenemos en el sujeto. Por lo cual la fuente de la verdad, en este caso, no está en la experiencia sino, por decirlo así, en la razón, que nos permite analizar el significado de los términos del enunciado y decidir acerca de su verdad o falsedad. En conclusión, según Kant, serían posibles solamente los tipos de enunciados indicados en la figura: analíticos *a priori*, sintéticos *a priori* y sintéticos *a posteriori*.



Antes de analizar las implicancias del cuadro, formulemos a Kant nuestras ya muchas veces reiteradas cuatro preguntas acerca de la matemática. Dada su concepción, a la pregunta acerca de *qué* son los objetos matemáticos, Kant contestaría que son elementos de nuestro aparato perceptual o de nuestro sistema

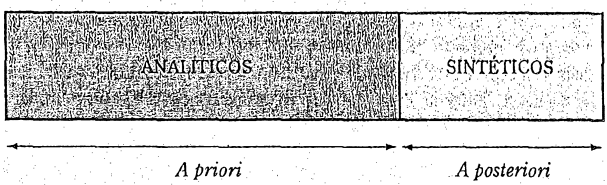
categorial que nos permiten ordenar y tratar con los fenómenos concretos. Y a la pregunta acerca de cuáles son las fuentes de las verdades matemáticas, la respuesta de Kant sería: la intuición, la contemplación, pero no como en el caso de Platón, de objetos de una realidad distinta a la concreta, sino de las propiedades de nuestro sistema subjetivo de ordenación de los fenómenos. Y como tenemos el privilegio de poder contemplarlos directamente, con inmediatez, porque forman parte de nuestro propio aparato perceptual o racional, la verdad matemática, como ya señalamos, se nos impone en virtud de su carácter *a priori*. A la tercera pregunta, respecto de la posibilidad de extender el conocimiento matemático, la respuesta de Kant no sería muy distinta de la de Pitágoras o Platón, por cuanto acepta también él a la *intuición* como fuente de conocimiento matemático. Finalmente, en cuanto a las relaciones de la matemática con la realidad, ya hemos señalado que Kant considera que los verdaderos objetos reales son incognoscibles y que los objetos físicos son construcciones que efectuamos a partir de los fenómenos. Pero en lo que se refiere a la experiencia, diría que existe una relación entre matemática y experiencia no muy distinta de la que sostienen los empiristas. La matemática, que corresponde, por una parte, a nuestro sistema perceptual y a su modo peculiar de estructuración, y, por otra, a nuestro sistema de construcción de conceptos, el sistema categorial, estaría estrechamente vinculada con nuestra experiencia y con los objetos de la experiencia, pero no con los objetos en sí. La matemática es importante para la práctica, para la técnica, y, en general, para todo aquello relacionado con los fenómenos, pero en el sentido de que está conectada con nuestro mundo, el que hemos podido construir con nuestras percepciones y categorizaciones. Pero no podemos saber, argüiría Kant, si el mundo de los objetos en sí consta de propiedades tales que la matemática seguiría siendo imprescindible para entenderlo o habría que acudir a otro tipo de estructuración del conocimiento, siempre que tal conocimiento fuera posible, lo cual no parece ser el caso.

Debemos señalar que, pese a la diferencia entre el punto de vista kantiano y el aristotélico, ambos tienen algo en común acerca de las verdades matemáticas. El primero centra en el sujeto y en su aparato cognoscente el origen de la verdad científica (o al menos, del conocimiento científico) mientras que el segundo supone que el conocimiento se relaciona de manera íntima con la naturaleza de las cosas. Sin embargo, tanto para Kant como para Aristóteles, los enunciados verdaderos de la matemática tienen el carácter de *necesarios*, en el sentido de que sabemos que son ciertos pero también que no podrían ser de otra manera. El carácter de necesidad para Aristóteles parece ser metafísico y corresponder a la naturaleza de las cosas, en tanto que, para Kant, sería más subjetivo y estaría relacionado con el modo peculiar en que se conforma nuestra naturaleza humana. Pero la matemática sería, para ambos, no solamente un conjunto de enunciados verdaderos, sino además *necesariamente* verdaderos, y este punto, que podríamos denominar "clásico", es el que será puesto en tela de juicio en el siglo XIX.

Volvamos ahora a la figura anterior. Los enunciados analíticos tienen obviamente que ser *a priori*, mientras que los sintéticos pueden ser, para Kant, *a priori* o bien *a posteriori*. El enunciado "el sarampión es contagioso" sería en principio sintético *a posteriori* si la definición de sarampión no incluye la condición de "contagioso"; si se lo define solamente por ciertos síntomas de la enfermedad tales como la aparición de pequeñas manchas rojas en la superficie de la piel, irritación ocular, tos, secreción nasal, y luego fiebre, inflamación de los ganglios del cuello, salpullido e irritación en la garganta, la decisión acerca de si es contagioso o no debe remitir a la experiencia: tendríamos que observar a los enfermos de sarampión y comprobar que, efectivamente, la enfermedad se transmite por contagio a individuos sanos.

Ahora bien, ¿existen o no enunciados sintéticos *a priori*? Este es un punto de primordial importancia. Para Kant, la respuesta es afirmativa, pues los juicios de la aritmética y de la geometría tendrían ese carácter. Tomemos este ejemplo, considerado por el propio Kant y analizado por él según la lógica tradicional: "5 + 7 = 12". Aquí el sujeto es "5 + 7", el predicado, "12", y la cópula, que vincula a ambos, "igual", que en este caso tiene que ser interpretado como "es idéntico a". Según Kant, en el concepto de "5 + 7" se halla la noción de "5", la de "7" y la de "suma", pero no la de "12", y es necesario recurrir a la certeza de la intuición para determinar cuál es el *resultado* de la suma. Por tanto, según el pensamiento kantiano, hay un ámbito del conocimiento que es sintético, porque nos dice algo acerca del mundo, pero también *a priori*, porque no demanda el recurso a la experiencia. En particular, los postulados de la geometría, por ser sintéticos *a priori*, no pueden ser menos que verdaderos, y conforman un tipo de conocimiento del mundo que no requiere de la inspección del mismo, como ocurría con los pájaros de nuestro jardín. Conocemos *a priori* que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos y, a la vez, sabemos que si se miden y suman los ángulos de una figura triangular, la de un terreno, por caso, obtendremos necesariamente como resultado un ángulo de dos rectos. En síntesis, lo que justifica los axiomas de la geometría no es un análisis del significado de las palabras "punto", "recta" o "distancia", sino una capacidad de la que disponemos para garantizar las verdades *a priori* entendidas como verdades necesarias.

En las décadas de los años veinte y treinta del siglo XX, el empirismo lógico, movimiento filosófico que ya hemos mencionado, rechazó firmemente esta tesis kantiana, y uno de sus representantes, Moritz Schlick, afirmó que el empirismo puede ser definido simplemente diciendo que no existe el conocimiento sintético *a priori*. De ser así, nuestra figura acerca de los enunciados posibles quedaría modificada del siguiente modo:



Nuestro propósito es ahora mostrar por qué la aparición de las geometrías no euclideanas significó un apoyo decisivo para el punto de vista empirista, en contra del pensamiento de Kant. En la época de éste, la única geometría conocida era la euclideana, y es a ella, por tanto, a la que se refiere Kant cuando afirma que los enunciados geométricos son sintéticos *a priori* y necesariamente verdaderos. Pero pocas décadas después de su muerte se pondría en evidencia que su punto de vista era insostenible, y la crisis de la filosofía kantiana, a este respecto, no fue muy distinta de la que experimentó el pitagorismo ante el descubrimiento de que la diagonal de un cuadrado y su lado no son conmensurables, sólo que en este caso la desencadenante de la crisis fue la aparición de las geometrías no euclideanas.

Características de las geometrías no euclideanas

Como ya señalamos, a partir de la afirmación de los cuatro primeros postulados de Euclides y la negación del quinto ("por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela a la misma"), Gauss, Bolyai y Lobachevsky, cada uno por separado, avanzaron deductivamente en busca de aquella esperada contradicción, pero ésta no se presentaba[7]. Los primeros teoremas que se obtenían eran idénticos a los de Euclides, porque no era necesario el quinto postulado para demostrarlos. Pero de pronto, sin que ello significara contradicción lógica alguna, comenzaron a aparecer "teoremas extraños", totalmente alejados de la intuición, tal como "la suma de los ángulos de un triángulo es *menor* que dos rectos". Otro "teorema" afirmaba que, si dos figuras poligonales son semejantes, es decir, tienen ángulos iguales y lados proporcionales (intuitivamente: tienen la misma forma), son iguales, lo cual implica que no existen figuras semejantes de distintos tamaños. Esto significaría que en esa geometría no podrían existir mapas o reproducciones en escala, porque éstos presentarían deformaciones con relación al objeto que se reproduce. (O sea que si un enamorado, al partir

7 Recuérdese lo afirmado en la nota 5: si se aceptan los postulados 1 a 4 como verdaderos, se puede demostrar que por el punto exterior a la recta pasa al menos una paralela y que por tanto la disyuntiva es si pasa sólo una o más de una.

de viaje, quisiera llevarse el retrato de su amada sin distorsiones, tendría que recurrir a uno de tamaño natural.) Por último, para citar otro ejemplo, en esta geometría la relación entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro resulta *mayor* que π. Pero si bien tales "teoremas" parecen inaceptables desde el punto de vista de la intuición o de nuestra experiencia cotidiana con figuras geométricas concretas, no proporcionan una demostración por el absurdo. Por cierto que en el sistema de Euclides dichos enunciados son falsos, pero este nuevo sistema, construido a partir de las cinco suposiciones mencionadas, no es el de Euclides sino una suerte de "caricatura negativa" del mismo. La única esperanza de "proteger" a la geometría euclideana hubiera sido obtener una contradicción, porque las contradicciones son falsas no por razones geométricas sino por razones lógicas, pero el hecho es que Gauss, Bolyai y Lobachevsky obtuvieron una cantidad no exagerada pero bastante elevada de consecuencias "extrañas" pero no contradictorias, es decir, "teoremas" distintos de los de la geometría euclidea.

En la geometría de Gauss, Bolyai y Lobachevsky, por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela a dicha recta, y se puede demostrar que ello inmediatamente lleva a la existencia de infinitas paralelas a la recta. Es posible también negar que por un punto exterior a una recta pase paralela alguna (es decir, afirmar que no pasa *ninguna* paralela a ella), en cuyo caso todas las rectas que pasan por dicho punto cortarán a la recta dada. Como ya adelantamos, esta nueva geometría no euclideana corresponde a la hipótesis de los ángulos obtusos de Saccheri y obliga a negar el segundo postulado de Euclides. Fue presentada por el matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866) en 1854; se trató de una memoria expuesta en la Universidad de Gotinga ante un jurado del que participaba Gauss. En contraposición a la geometría de Gauss, Bolyai y Lobachevsky, que según hemos señalado es llamada hoy *hiperbólica*, la geometría no euclideana de Riemman se denomina *elíptica*. En ella la suma de los ángulos de un triángulo es *mayor* que dos rectos y la razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro es *menor* que π. La "recta", en esta geometría, es cerrada, ilimitada pero finita, y es por ello, precisamente, que debe excluir como verdadero el segundo postulado de Euclides. Las denominaciones aplicadas a estas geometrías, *hiperbólica* y *elíptica*, se deben al matemático Félix Klein, quien además llamó *parabólica* a la geometría euclídea. Por ello se justifica que podamos hablar de *las* geometrías no euclideanas, en plural.

Se planteaba entonces el siguiente problema: al realizar las deducciones correspondientes a una geometría no euclideana, ¿no se obtienen contradicciones porque no las hay entre las consecuencias obtenidas o porque no han aparecido hasta el momento? Al fin de cuentas, el número de deducciones podría ser infinito y la primera contradicción aparecer mucho más adelante de la última conclusión a la que se ha llegado. El rasgo genial de Gauss, Bolyai y Lobachevsky, y luego de Riemann, fue el de pensar que tal contradicción no existe y que se estaba en presencia de una estructura lógica o una suerte de juego en

donde las suposiciones iniciales podían resultar muy extrañas y paradójicas para el sentido común, al igual que los teoremas que de ellas se obtenían, pero que, desde el punto de vista de la lógica, no conducirían a ningún enunciado reprochable. Como se comprende, la situación causaba cierta perplejidad. La estructura lógica que así se obtenía, ¿a qué se refería? ¿Era una geometría a pleno derecho? ¿O era más bien una "parodia" de geometría, en la cual los conceptos que se utilizaban estaban expresados con palabras semejantes a las de la geometría tradicional, con sus peculiares principios, suposiciones iniciales y deducciones a partir de estos principios, pero en la cual se arribaba a teoremas extraños aunque no contradictorios?

Problemas filosóficos planteados por las geometrías no euclideanas

Desde un punto de vista filosófico y científico, la respuesta a las preguntas anteriores no estaba clara ni siquiera para los propios creadores de las geometrías no euclideanas. Algunos de ellos, como Lobachevsky y otros matemáticos, hablaron de "geometría imaginaria", pensando que, como en la vieja geometría tradicional, también aquí se mencionan objetos, pero no reales o legítimos (aun en sentido platónico) sino creados por nuestro pensamiento, por nuestra imaginación, artificialmente. Cabría mencionar aquí la idea del famoso filósofo alemán Edmund Husserl, creador de la filosofía llamada "fenomenología", acerca de las "ontologías regionales", cada una formada por objetos con sus peculiares características. En este sentido, la geometría euclídea trataría acerca de una peculiar ontología regional, en tanto que la geometría de Gauss, Bolyai y Lobachevsky, por una parte, y la de Riemann, por otra, definirían ontologías regionales distintas. La diferencia, tal vez, es que la primera tendría relaciones con lo concreto o se vincularía con lo concreto a través de un isomorfismo, como lo pensaba Pitágoras, en tanto que estas ontologías regionales descubiertas por Gauss, Bolyai, Lobachevsky y Riemann implicarían una mera curiosidad para los interesados en construir un juego puramente formal como el ajedrez. De hecho, lo que finalmente comenzó a imponerse en el campo de la matemática fue la idea de que los sistemas geométricos como los que Gauss, Bolyai, Lobachevsky y Riemann habían introducido, no serían más que estructuras lógicas formadas por suposiciones iniciales escogidas de modo arbitrario, razonamientos correctos a partir de esas suposiciones y teoremas obtenidos en virtud de estos razonamientos. Por ser un ejercicio lógico, tales estructuras tendrían un interés puramente formal, y lo único que se requeriría para su aceptación era la corrección de los razonamientos empleados.

Si esto es así, en la geometría de Gauss, Bolyai y Lobachevsky o en la de Riemann podemos entender que las palabras "punto", "recta", "plano", "pasar por", "entre" o "distancia", que se usan en el discurso, son ahora como la x, la

y y la *z* de una forma lógica tal como "Todos los *y* son *z*, todos los *x* son *y*; por consiguiente, todos los *x* son *z*". Recordemos que aquí no hay premisas y conclusión porque, para que las hubiere, tendríamos que quitar las letras *x*, *y*, *z* y poner en su lugar palabras "de carne y hueso". Si reemplazáramos *x*, *y*, *z* por "griego", "hombre" y "mortal", tendríamos el razonamiento "todos los hombres son mortales, todos los griegos son hombres; por consiguiente, todos los griegos son mortales", una ejemplificación obtenida a partir de la forma lógica. Las letras *x*, *y*, *z* se denominan *variables* no porque ellas puedan cambiar, sino porque podemos variar, de manera arbitraria, los reemplazos "de carne y hueso" que producen los ejemplos concretos. Como ya señalamos, decimos que la forma lógica es *correcta* cuando a partir de ella no se obtendrá jamás ejemplo alguno con premisas verdaderas y conclusión falsa.

Dicho técnicamente, en la forma silogística anterior, puesto que no se están tomando *x*, *y* y *z* como nombres de algo especial, se dice que dichos términos tienen *denotación abierta*. Por ello, podríamos darles cualquier interpretación y, en cada una de ellas, si las premisas son verdaderas (asunto que no puede decidir la lógica) y se ha cuidado que la forma de los razonamientos utilizados para las demostraciones sea correcta, se obtendrán conclusiones verdaderas. Las geometrías no euclideanas serían algo así como "esquemas de geometría" tales que, según el sentido que demos a los términos o palabras, podrán transformarse en un ejemplo concreto de discurso. En éste, en la mayoría de los casos, las suposiciones iniciales no se harán verdaderas (o al menos no todas), pero tal vez podría acontecer que sí hubiese algún ejemplo en donde todas ellas se satisficieran. Si así fuese, también serán verdaderos los teoremas porque se ha procedido a realizar una deducción. Insistimos en que, en esta estructura lógica en la que en el discurso hay términos o palabras a las que les falta la denotación o contenido semántico, las afirmaciones no son genuinas proposiciones o enunciados, que pueden ser verdaderos o falsos, pues su verdad o falsedad dependerá del significado que demos a las palabras que estamos utilizando.

De hecho, una estructura tal se parece realmente a un juego lógico con alguna vinculación con el ajedrez. En el ajedrez tampoco sabemos exactamente a qué nos estamos refiriendo con las fichas (lo que sí sabemos es cómo moverlas), y nadie en su sano juicio creerá que está ejecutando política monárquica porque mueve el rey, la reina y sus peones. El haber llamado a las fichas "rey", "alfil" o "torre" es un homenaje a la tradición; del mismo modo, en una geometría no euclideana las palabras "punto", "recta", "plano", etcétera, no tienen ningún significado. Semejante metodología se conoce como *método axiomático formal*, o simplemente *método axiomático*, y el juego que hemos descrito en particular es un ejemplo de lo que se llama *sistema axiomático formal*. Lo que se ha hecho con las geometrías no euclideanas podría hacerse, en realidad, de manera puramente convencional, tomando un vocabulario arbitrario (pero sin significado) y, con las reglas gramaticales usuales, construir "esquemas de proposiciones" o "cuasiproposiciones" (porque no son realmente proposiciones, de las cua-

les se pueda predicar su verdad o falsedad), adoptar algunas de ellas como "axiomas", o sea, puntos de partida del juego, y luego, razonando correctamente, obtener "teoremas". Se comprende que procediendo de este modo la cantidad de juegos posibles, es decir, de sistemas axiomáticos, es infinita.

Gauss fue quien comprendió por primera vez que lo desarrollado por él era una cuestión de lógica, pero que, por otra parte, se aceptaba que en el espacio físico en el que vivimos hay figuras *reales* puntuales, rectilíneas, planas o triangulares que parecen tener las tradicionales propiedades de la geometría de Euclides. De ser así, por medio de mediciones se podría establecer si los triángulos reales tienen la propiedad de que la suma de sus ángulos es *igual* a 180° o es *menor* que 180°. Se cree que el propio Gauss, con la ayuda de algunos colaboradores, intentó medir con el instrumental de los agrimensores los ángulos de una figura triangular formada por las cumbres de tres montañas muy distantes entre sí. Pero de hecho, dentro de los límites de error de los instrumentos, la suma resultó ser igual a 180°. Conviene aclarar que esta constatación no es concluyente, no sólo por la inevitable presencia de errores experimentales en las mediciones, sino porque, aunque el espacio físico fuera no euclideano, bien podría ocurrir que la diferencia con 180° fuera perceptible sólo para triángulos de tamaño astronómico, tal como el formado por el Sol, la Luna y la Tierra.

La mayoría de los matemáticos, físicos y filósofos de la época de Gauss, Bolyai y Lobachevsky, influidos por el pensamiento de Kant, insistieron en que las geometrías no euclideanas, como ya señalamos, eran puramente "imaginarias", lo que hace pensar que el contenido semántico de esta geometría no era negado. Lo que se quería significar con ello es que la designación de las expresiones de las geometrías no euclideanas no eran alusivas al mundo real, sino a un mundo imaginario de entidades que nunca encontraríamos en la realidad. Dicho de otro modo, la única geometría "verdadera" o "científica" sería la euclideana, tal como lo pensaba Kant, es decir, aquélla que describe el espacio físico real, mientras que las no euclideanas semejarían más bien juegos de excéntricos o pertenecerían a lo que hoy llamaríamos un relato de ciencia ficción. Pero la física contemporánea alteró bruscamente esta convicción, pues el espacio físico, en la teoría de la relatividad general de Einstein (1916), resultó ser no euclideano sino elíptico, es decir, quedaba descrito por la geometría de Riemann. Lo que sin embargo fue mostrado anteriormente, especialmente por Hilbert, es que hay que hacer una distinción entre el desarrollo formal o "puro" (desde un punto de vista sintáctico) de una geometría, y el hecho de que los axiomas puedan o no, convenientemente interpretados, ser verdaderos cuando se aplican al espacio físico, lo cual no es tarea exclusiva de la matemática sino también de la física. Esto significa que la interpretación dotará al desarrollo de la geometría de contenido semántico, asunto que discutiremos en detalle más adelante.

En este punto vale la pena volver a los *Fundamentos de la geometría* de Hilbert. Este libro tiene dos méritos, uno de los cuales, ya mencionado, es la reconstrucción rigurosa del sistema euclideano. El otro es que Hilbert presenta

aquí su noción de sistema axiomático formal, que, reiteramos, consiste en este juego lógico de introducir axiomas de carácter geométrico, correspondan o no al mundo real, sean o no intuitivos, y analizar qué puede deducirse a partir de ellos. Aquí no hay alusión explícita a ningún tipo de entidad real de la física o de alguna otra disciplina. El propio Hilbert afirmaba que, si bien estamos obligados de algún modo a emplear palabras del lenguaje cotidiano para hablar *en* (o *dentro de*) un sistema axiomático formal, en lugar de "punto", "recta" y "plano" bien podríamos utilizar "mesa", "silla" y "vaso de cerveza" sin alterar en lo más mínimo al sistema propiamente dicho: "punto" o "mesa", aquí, son meros rótulos vacíos sin significado alguno. El lector debe recordar lo que señalábamos, en el mismo sentido, a propósito de los nombres de las fichas del ajedrez.

Esta noción de sistema axiomático formal es primordial, porque ahora comienza, hecha la distinción anterior, a pensarse que hay en realidad dos tipos de matemática. Por una parte, la matemática *pura*, que precisamente se ocupa de estudiar los distintos sistemas axiomáticos formales, con afirmaciones iniciales hechas en forma arbitraria y que hablan de entidades acerca de las cuales no se sabe realmente qué son (ni importa, *ni se debe* saberlo) y el análisis de qué es lo que se puede demostrar a partir de ellas. Todo lo cual puede parecer un mero juego sin interés científico, hasta que descubramos, quizás, que a partir de él es posible desarrollar un segundo tipo de matemática, la matemática *aplicada*, campo que se despliega en un cierto ámbito (como el de la física) cuando las suposiciones iniciales del "juego" se interpretan, otorgándoseles contenido semántico, y por consiguiente, en ese mismo ámbito, admitida la verdad de los axiomas interpretados, serán verdaderos también todos los teoremas que ya han sido demostrados. En el primer caso, lo que interesa es solamente si una determinada proposición geométrica puede deducirse o no a partir de los axiomas; en el segundo, si ella, y en general la geometría que la incluye, es adecuada o no para describir el espacio físico.

Si fuese así, habría que distinguir, *a propósito de la propia geometría euclideana*, entre aquélla que es puramente formal y aquélla que, en un sentido físico, pretende describir las propiedades del espacio real. Ésta es una distinción importante porque habrá de separar dos cuestiones distintas, la puramente lógica, que se relaciona con las suposiciones meramente formales, de la que corresponde a la física, encargada de decidir si tal o cual geometría describe o no correctamente la realidad. Suele hablarse, para distinguirlas, de *geometría matemática* y *geometría física*. En 1921, Einstein pronunció una conferencia, "Geometría y experiencia", que aún hoy conforma una de las formulaciones más claras acerca del problema que nos ocupa, en particular porque expone lo insostenible del punto de vista de Kant. Así es comentada por uno de los mayores filósofos de la ciencia del siglo XX, el empirista lógico Rudolf Carnap:

> Einstein hablaba de las "matemáticas", pero aludía a la geometría en los dos sentidos en la que se la puede entender. Decía: "En la medida en que los

> teoremas de las matemáticas se refieren a la realidad, no tienen certeza". En la terminología kantiana, esto significa que, en la medida en que son sintéticos, no son *a priori*. Y continuaba: "Y en la medida en que poseen certeza, no se refieren a la realidad". En la terminología kantiana, en la medida en que son *a priori*, no son sintéticos. [...] Kant sostenía que el conocimiento *a priori* tiene certeza; la experiencia no puede contradecirlo. La teoría de la relatividad puso en claro para todos los que la entendieron que, si se toma la geometría en este sentido *a priori*, no nos dice nada acerca de la realidad. No es posible formular ningún enunciado que combine la certeza lógica con el conocimiento de la estructura geométrica del mundo[8].

En síntesis, reiteramos, habrá que dividir la matemática, especialmente la geometría, por el momento, y también después otras ramas de la misma, en dos tipos de disciplinas: (a) las puramente formales, sintácticas o teóricas, donde lo que se investiga es qué puede ser demostrado a partir de axiomas iniciales sin contenido semántico; y (b) en tanto ciencias aplicadas y con contenido semántico, aquéllas donde se está hablando de manera concreta o particularizada de ciertas entidades reales, y en las cuales los puntos de partida son afirmaciones que se aceptan como adecuadas para describirlas y que pueden ser incluso meramente hipotéticas. Aunque el próximo capítulo de este libro estará dedicado fundamentalmente a tratar algunas características generales de los sistemas axiomáticos, abordaremos en él también, nuevamente, el tema de la distinción entre la matemática formal o pura y la matemática aplicada.

8 Carnap, R., *Fundamentación lógica de la física*, Madrid, Orbis-Hyspamérica, 1985, p. 158. (Original: 1966.)

6 Los sistemas axiomáticos formales

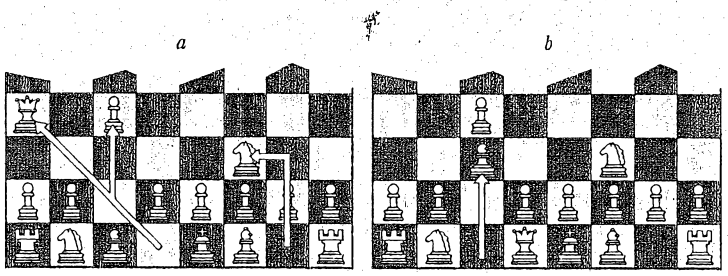
Los sistemas axiomáticos formales y el ajedrez

En los últimos párrafos del capítulo anterior, señalamos la semejanza que existe entre los sistemas axiomáticos formales y el juego de ajedrez, similitud que queremos pormenorizar aquí antes de caracterizar a aquéllos con mayor precisión. En primer lugar, en el ajedrez jugamos con fichas, mientras que en los sistemas axiomáticos formales tratamos con determinado vocabulario, con palabras tales como "punto", "recta" y "plano", que no denotan, que nada significan, pero que son los vocablos con los que edificaremos el discurso. En segundo lugar, hay que definir en el ajedrez qué es una *posición legítima*; por ejemplo, es ilegítimo poner en una misma casilla un peón y una torre. Del mismo modo, la construcción de ciertas expresiones sería morfológicamente ilegítima en el discurso de los sistemas axiomáticos formales, pues hay que respetar categorías y reglas gramaticales: "dos puntos y pertenencia o plano", por ejemplo, no es una expresión legítima. A las expresiones que se construyen acatando dichas categorías y reglas las llamaremos *cuasiproposiciones*, porque (1) no son auténticas proposiciones ya que éstas tienen significación o *contenido semántico*, y (2) porque el mero añadido de designación a esas expresiones las transformaría en proposiciones genuinas.

Una vez que se ha convenido en cuáles son las posiciones legítimas, las reglas del ajedrez establecen ciertas posiciones iniciales a partir de las cuales se realiza el juego: para cada contrincante hay una fila de peones delante de las torres, caballos, alfiles, la dama y el rey. Lo análogo a las posiciones iniciales, en un sistema axiomático, son las afirmaciones que desde el punto de vista sintáctico tomamos como "axiomas". Entre los elementos que se definen en el ajedrez se encuentran también las reglas de movimiento, que nos llevan de una posición dada a una nueva posición, por caso, "el alfil sólo puede moverse por sus diagonales"; equivalen en un sistema axiomático formal a las reglas de deducción lógica, que nos llevan de cuasiproposiciones dadas a nuevas cuasiproposiciones. Al cabo de ciertos movimientos, las piezas del ajedrez se ubican de determinada manera, y su posición será legítima si para llegar a ella se han respetado las reglas de movimiento de las fichas; análogamente, la "legitimidad" de una cuasiproposición en un sistema axiomático, es decir, el ser un teorema a

109

pleno derecho, estará garantizada por haber sido deducida mediante formas correctas de razonamiento a partir de los axiomas. (Véase la figura.)



(a) Posición *legítima* de las piezas blancas al cabo de tres jugadas: se han movido el peón, el caballo y la dama, en ese orden, de acuerdo con las reglas de movimiento de cada una de esas fichas. En un sistema axiomático, equivale a decir que se ha llegado a un teorema a partir de los axiomas, empleando para ello formas correctas de razonamiento. *(b)* Posición *ilegítima* de las piezas blancas: se han movido el peón y el caballo, como en el caso anterior, pero en la tercera jugada el alfil no respeta la regla de movimiento que se le ha asignado. En un sistema axiomático, equivale a decir que, puesto que no se ha empleado una forma correcta de razonamiento en la tercera deducción, no se ha llegado forzosamente a un teorema.

Ahora bien, según qué axiomas admitamos tendremos sistemas axiomáticos ("juegos") distintos, y ello es exactamente lo que ocurre con el ajedrez[1]. Pero también el número y tipo de fichas o su posición inicial, así como las reglas de movimiento, son totalmente convencionales. La pregunta "¿qué es un ajedrez legítimo?" sólo se podría responder convencionalmente diciendo que "es aquél juego en el que se han fijado el número y tipo de fichas, sus posiciones inicia-

1 Conviene aclarar que en muchos tratados de fundamentos de la matemática y de la lógica se emplea la expresión "sistema axiomático" con referencia, en realidad, a una *familia* de sistemas que tienen la propiedad de ser *lógicamente equivalentes*. ¿Qué significa ello? Que tienen exactamente los mismos teoremas, lo cual no implica que tengan los mismos axiomas. (Debe tenerse en cuenta además que, por la definición de teorema, *los axiomas mismos cuentan como teoremas* porque existe una regla lógica según la cual de una proposición *p* se obtiene *p*). Puede suceder que determinado teorema, en un primer sistema, aparezca como axioma en un segundo, y viceversa. Ello puede expresar una diferencia, por parte de distintos autores, en cuanto al modo en que desean expresar sus ideas. Sin embargo, nosotros emplearemos la expresión "sistema axiomático", no para referirnos a tales familias de sistemas sino, en un sentido estricto, para designar a un *único* sistema caracterizado por determinados axiomas y que incluye a todos los teoremas que se deducen a partir de ellos.

les y las reglas de movimiento según lo estipula la Federación Internacional de Ajedrez". Ello permite que muchas personas puedan jugar al ajedrez, y aquél que se negase a aceptar tales convenciones difícilmente encuentre entonces con quiénes jugarlo. Pero no son obligatorias. Se han propuesto distintos juegos posibles de ajedrez, como aquél que incluye una pieza temible que puede ser llamada "alfil-caballo" porque puede ser movida indistintamente como el alfil y el caballo del ajedrez normal. En el "ajedrez marsellés" se permite a cada jugador hacer dos movimientos sucesivamente, lo cual cambia bastante la estrategia del juego. El gran maestro cubano José Raúl Capablanca inventó diversos "ajedreces" alternativos, como el "ajedrez en cilindro" y otros por estilo. Xul Solar, el notable escultor, pintor e inventor de objetos excéntricos, amigo de Borges, había concebido un ajedrez con una cantidad de fichas diferentes a las habituales y un tablero de 16 x 16 casillas. En la serie televisiva de ciencia ficción *Viaje a las estrellas* los tripulantes de la nave *Enterprise* juegan un ajedrez tridimensional, y en ciertos relatos del mismo género se juegan ajedreces muy complejos de manera tal que completar una partida requiere de la participación de muchas generaciones: una persona la inicia y su tataranieto, quizás, logre finalizarla. Y si uno preguntara aquí, desde un punto de vista puramente teórico, no histórico o práctico, cuál es el ajedrez legítimo, la respuesta sería: todos ellos son igualmente legítimos, una vez que se aceptan para cada uno sus correspondientes piezas, posiciones iniciales, reglas de juego, etc. Lo mismo cabe decir de los sistemas axiomáticos.

Desde una perspectiva puramente lógica, podemos entender a la geometría de Euclides como un sistema axiomático formal, pues tiene su vocabulario, las categorías de ese vocabulario, y tiene sus puntos de partida, los axiomas, y lo que se deduce a partir de ellos, los teoremas. Tanto la geometría euclídea como las geometrías no euclídeas serían, en un plano de igualdad, sistemas axiomáticos formales, es decir, "juegos" que, como sucede con los distintos ajedreces que hemos mencionado, tendrían que ser considerados, todos ellos, perfectamente legítimos. Pero, históricamente hablando, en el siglo XIX la geometría euclideana parecía tener más prosapia y por tanto equivaldría más a un "ajedrez legítimo" que las geometrías no euclideanas, consideradas éstas como una suerte de "ajedreces excéntricos" al modo de los de Capablanca. Lo que sucede es que la geometría euclídea parecía una ciencia que iba más allá de su aspecto de sistema axiomático formal; de hecho, si se la entiende como un recurso para describir el espacio físico, la geometría euclídea está constituida, no por cuasi-proposiciones, sino por auténticas proposiciones que informan acerca de ciertas entidades del mundo real, pretenden por tanto ser verdaderas y la razón de su verdad radicaría en la evidencia, en el sentido aristotélico, de sus axiomas. Nada de ello ocurría con las geometrías no euclideanas. De allí que, en un principio, insistimos, la geometría euclideana fuera concebida como la única "legítima", pues describiría, ella y ninguna otra, la naturaleza del espacio físico, o bien, quizás, la del mundo platónico de las formas geométricas. Esto sería algo

así como quitar legitimidad a todo juego de ajedrez cuyas normas no hayan sido fijadas por la Federación Internacional de Ajedrez. Pero con el tiempo, como ya señalamos, se advirtió la dualidad que supone hablar de "geometría euclideana" a secas. Cuando a ésta se la entiende como un mero sistema axiomático formal, las geometrías no euclideanas tienen el mismo grado de legitimidad que ella.

La revisión de los fundamentos de la matemática que condujo a la noción actual de "sistema axiomático formal" se inició con la publicación en 1882 del libro *Lecciones de geometría moderna* del matemático alemán Moritz Pasch (1843-1931); en la misma línea encontramos trabajos de otro alemán, Julius Richard Dedekind (1831-1916), de 1888, y del italiano Giuseppe Peano (1858-1932), quien, en 1883, publicó *Los principios de la geometría expuestos lógicamente*, en el que expresa todas las afirmaciones de su sistema deductivo por medio de meros símbolos. Estos antecedentes sirvieron de base a *Los principios de la geometría* (1899), obra fundacional de Hilbert mencionada en el capítulo anterior, con la que llega a su culminación la introducción definitiva de esta noción clave en el ámbito de la matemática contemporánea.

Caracterización de los sistemas axiomáticos formales

Cinco significados de la palabra "formal"

Ya ha nos hemos encontrado en párrafos anteriores con la palabra "formal", y ello seguirá ocurriendo reiteradamente a lo largo de este libro. Pero conviene advertir que este vocablo tiene al menos *cinco* significados distintos, que detallamos a continuación:

1. El primero de los sentidos de la palabra "formal" se refiere al empleo de signos simples en lugar de expresiones del lenguaje ordinario. Por ejemplo, en aritmética y álgebra usamos signos tales como "+", "x", "a", "x", "z^3" y muchos otros para hacer más nítido y riguroso el lenguaje de la matemática. Este fue un gran paso en la historia de la disciplina, debido particularmente a matemáticos renacentistas como el francés François Viète (o Vieta). Antes de esta innovación, algebristas como el árabe Al-Jwarizmi (que dio nombre a palabras tales como *algoritmo*), se veían obligados a emplear el lenguaje ordinario para indicar cómo se resuelven, por ejemplo, las ecuaciones de segundo grado. La complejidad de este discurso es inimaginable y parecía necesario disponer de un gran genio para investigar en matemática.

2. La segunda acepción de "formal" se refiere a una noción que es utilizada sistemáticamente por Aristóteles en sus investigaciones de carácter lógico, tal como se las encuentra en los *Primeros Analíticos*, texto en el que el gran filósofo desarrolla una teoría de la deducción. Lo que se advierte en esta manera de

desarrollar la lógica es que prácticamente no se emplean ejemplos de deducción sino "esquemas" de razonamientos, en los que en lugar de palabras concretas que figuran como sujetos y predicados de las oraciones utilizadas aparecen letras que pueden reemplazarse por términos cualesquiera, obteniéndose así casos particulares o ejemplos del esquema. Por ejemplo, y en contra de lo que afirman ciertos textos de lógica, Aristóteles no se ocupa directamente de la corrección o validez de silogismos tales como:

Todos los hombres son mortales
Todos los griegos son hombres

Todos los griegos son mortales

En realidad, Aristóteles analiza la corrección del siguiente esquema:

Todos los M son P
Todos los S son M

Todos los S son P

Éste es un ejemplo de *forma* de razonamiento. Lo que Aristóteles entiende por "corrección" o "validez" del esquema consiste en que *todo ejemplo* del esquema cuyas premisas sean verdaderas conducirán a una conclusión igualmente verdadera. La anterior es una forma correcta de razonamiento porque si sustituimos "M" por "hombres", "P" por "mortal" y "S" por "griegos" obtenemos un razonamiento correcto, pero lo mismo ocurriría si hiciéramos sustituciones tales como "M" por "argentinos", "P" por "sudamericanos" y "S" por "cordobeses", o bien M" por "músicos", "P" por "artistas" y "S" por "flautistas", y así siguiendo.

Ahora bien, una forma de razonamiento correcta nada nos dice acerca de la *verdad* de las premisas, precisamente por su carácter *formal*, ajeno a verdades o falsedades. Puede suceder que la forma sea correcta pero que, en la sustitución, se utilicen una o más premisas *falsas* y en tal caso la conclusión podrá ser verdadera o falsa. Por ejemplo:

Todos los africanos son americanos
Todos los argentinos son africanos

Todos los argentinos son americanos

A pesar de que la forma de este argumento es correcta, las premisas son falsas y sin embargo la conclusión es verdadera. Ello nos muestra que la importancia de las formas de razonamiento radica en que si las premisas del razonamiento son verdaderas *entonces* la conclusión necesariamente será verdadera.

Pero si existe al menos una premisa falsa, la corrección de la forma de razonamiento no nos garantiza la verdad de la conclusión. Puede ocurrir que un razonamiento cuya forma sea correcta lleve de falsedades a verdades, o bien de falsedades a falsedades, como en el siguiente ejemplo:

Todos los africanos son asiáticos
Todos los argentinos son africanos

Todos los argentinos son asiáticos

No cabe duda de que el empleo de la palabra "formal" aplicado al análisis de esquemas al modo aristotélico parece justificado y puede ser considerado, en la historia de la matemática, como un anticipo del empleo de variables para expresar, por ejemplo, leyes de la aritmética. Así, por ejemplo, el matemático no se ocupa de casos particulares tales como "7 + 5 = 5 + 7" sino de la propiedad general expresada por el esquema "$a + b = b + a$".

3. Una tercera acepción de "formal" se refiere a la posibilidad de construir un orden deductivo jerárquico para las afirmaciones concretas de determinadas disciplinas fácticas tales como la física. Así, por ejemplo, *formalizar* la mecánica, la óptica o el electromagnetismo implicaría convertirlos en sistemas deductivos en los que se partiría de algunas afirmaciones básicas (los "principios") para obtener las demás afirmaciones deduciéndolas de aquéllas. Desarrollaremos este punto en detalle en el Capítulo 8.

4. La cuarta acepción de "formal" sorprendería a muchos filósofos antiguos o tradicionales. Se relaciona con el hecho de que (sobre todo en matemática y en lógica) *no tenemos en cuenta el significado de los símbolos que empleamos*, y en cambio privilegiamos los aspectos meramente *sintácticos* y *computacionales* (o algorítmicos) de los signos. Este uso del término es el que se relaciona con el análisis de los sistemas axiomáticos *formales*. Por el momento, esta acepción es la que adoptaremos.

5. Una quinta acepción de la palabra "formal" está vinculada con la aceptación de entidades que no son espaciotemporales; por caso, las que habitan en el segundo mundo de Platón, las ideas o *formas*. Como expondremos en el Capítulo 16, ciertas corrientes filosóficas de la matemática admiten la existencia de "objetos matemáticos" que tienen naturaleza platónica. Pero es importante anticipar que a esta postura se la llama actualmente *realismo matemático* y no *formalismo*. El formalismo, que hemos de analizar más adelante, es una corriente filosófica radicalmente opuesta al realismo matemático.

Haremos ahora una descripción más rigurosa de cómo se plantea un sistema axiomático formal, cuál es su estructura y cuál es su desarrollo, de acuerdo con las normas del método axiomático. Supongamos que queremos construir un determinado sistema, que bien puede ser provisoriamente el de una geometría no euclideana. ¿De que etapas o pasos se compone el método para la edificación y desarrollo de tal sistema? Puesto que para llegar de los axiomas a los teoremas hay que aplicar la lógica, en el primer paso hay que presentar lo que se llama *lógica presupuesta* o *subyacente*, donde lo que se indica es qué lógica, y especialmente qué teoría de la deducción, hemos de emplear. Pero acerca de este punto es necesario hacer algunas aclaraciones.

Sobre la lógica presupuesta

Muchos lógicos contemporáneos prefieren hablar de *las* lógicas, en lugar de *la* lógica, en virtud de que consideran que las transformaciones que ha sufrido la disciplina, desde los tiempos de Aristóteles, los autoriza a pensar que están en presencia de muy distintas formas de concebirla. Pero no hay inconvenientes en seguir denominando *lógica* a un cuerpo de conocimientos que se ha diversificado en ramas o capítulos de muy distinta naturaleza. Lo cierto es que se ha comprendido que los llamados *principios lógicos* a partir de los cuales se la edifica pueden no ser admitidos en algunos casos, y en posteriores capítulos de este libro analizaremos el problema con mayor detalle. Hay principios lógicos que han planteado dudas. Por ejemplo, el denominado *principio de tercero excluido*, según el cual toda proposición tiene que ser o *bien* verdadera o *bien* falsa (y no cabe otra alternativa), ha sido modificado por quienes piensan que hay proposiciones que podrían estar en una suerte de "tercer estado": tendríamos proposiciones que no son ni verdaderas ni falsas, sino indeterminadas. Si se admite tal cosa, la lógica que resulta es bastante diferente de la lógica tradicional en más de un aspecto. Por ello los lógicos se han vuelto muy respetuosos en cuanto a estas posibles variantes, del mismo modo en que los matemáticos han hecho lo propio en cuanto a la posibilidad de no aceptar siempre un mismo conjunto de axiomas para construir sus sistemas axiomáticos. Aunque en la elección de la lógica subyacente existe este componente arbitrario, vamos a adoptar por el momento una posición un tanto clásica, aceptando los principios lógicos tradicionales, los de la lógica habitual, si bien en su versión contemporánea. Por otra parte, es necesario tener en cuenta otros aspectos que atañen a la lógica subyacente de un sistema axiomático, que comentaremos a continuación.

A. Hay que señalar con qué categorías lógicas o gramaticales hemos de trabajar. Por ejemplo: lo que se llama *lógica elemental*, que aparece en los libros básicos sobre lógica, es una parte de la lógica que se refiere a *individuos*, o sea a las entidades elementales acerca de las que se va a

hablar, haciendo afirmaciones particulares o generales sobre ellas, y de las cuales se pueden afirmar *propiedades* o entre las cuales se pueden establecer *relaciones*. Sin embargo, hay partes de la lógica que proceden de manera diferente, pues eligen el concepto de *clase*, o a veces el de *conjunto*, en lugar del de individuo; aquí tendríamos lo que se llama *lógica de clases* o *de conjuntos*. En las llamadas lógicas *superiores* (entre las cuales, según algunos lógicos, habría que incluir la lógica de clases), además de individuos y de propiedades hay propiedades y relaciones de alto nivel; por ejemplo: propiedades de propiedades, propiedades de propiedades de propiedades, relaciones entre propiedades, etcétera, lo cual obliga a un tratamiento más arduo y complejo de las proposiciones y de los principios lógicos.

Aunque a veces ello es inevitable, en ciertas circunstancias no es necesario realmente adoptar una lógica subyacente complicada (o *fuerte*, como también se la llama) para edificar la matemática. Por ejemplo, lo que el gran lógico polaco-estadounidense Alfred Tarski llama *geometría euclídea elemental* es aquélla que usa una lógica subyacente, precisamente, de carácter elemental. Hilbert, en su libro sobre fundamentos de la geometría que ya hemos mencionado tantas veces, emplea de una manera no rigurosa (pues no puntualiza claramente qué es lo que está utilizando) la teoría de conjuntos; utiliza la capacidad de poder hablar de conjuntos y de conjuntos de conjuntos, que sería lo análogo a hablar de propiedades de propiedades, etcétera.

Respecto de este punto, se trata de señalar con qué categorías se va a trabajar, según la lógica subyacente elegida, y según cuál escojamos contaremos con pocas o con muchas categorías. En el caso de la geometría euclídea, por ejemplo, es evidente que la palabra "puntos" se refiere a *individuos* de cierto tipo, y lo mismo diríamos de las "rectas" y de los "planos": al menos en la formulación de Hilbert, puntos, rectas y planos son los individuos de los que trata la geometría. Cuando este autor habla de la relación *corresponderse mutuamente con* (que aquí significa *estar en* o *pasar por*, como en "la recta *r* pasa por el punto P"), es evidente que se trata de una relación *binaria* o *diádica* entre individuos, ya que intervienen sólo *dos* entidades; en cambio, la relación *entre*, que aparece en afirmaciones tales como "el punto A está entre B y C", es una relación *triádica*: las entidades que están relacionadas son *tres* y no sólo dos como en el caso anterior.

Es interesante destacar que, en determinados casos, es necesario aceptar ciertas *teorías presupuestas* para poder desarrollar un sistema axiomático. Para ilustrar esta circunstancia podemos considerar la categoría de la noción de "distancia", que es particularmente interesante. Se trata de lo que los matemáticos llaman una *función* o quizás *operación*, que asigna a cada *par de puntos* un número real, su *distancia*, lo cual implica que en la

lógica subyacente, para que esta función pueda estar definida, se emplea la aritmética de los números reales. Conviene señalar que la categoría de "función" no fue nunca considerada por la lógica aristotélica clásica. Desde el punto de vista filosófico, fue uno de los aportes de la lógica moderna, especialmente importante, y que tiene su origen en el campo de la matemática. Como se advierte, la teoría de los números reales, necesaria para definir "distancia", no pertenece específicamente a la lógica.
Si se toma como ejemplo la geometría euclideana, las anteriores serían las categorías presupuestas. En otras teorías, como las que analizaremos más adelante, las categorías que se eligen pueden ser diferentes. Pero en el ejemplo que desarrollaremos en el próximo capítulo, bastará como categorías a ser utilizadas la de *individuo* y la de *relación binaria* entre individuos.

B. Por otra parte, en la lógica presupuesta deben ser explicitadas, y éste es un punto de la mayor importancia, las nociones lógicas que han de ser utilizadas, o sea los operadores lógicos que aparecen en las proposiciones: *todos, algún, y, o, no, si... entonces, si y solo si.* Debemos tener presuposiciones acerca de la manera en la que se han de emplear estos operadores.

C. Ya mencionamos las *expresiones*, que son sucesiones cualesquiera de símbolos. Sin embargo, no todas ellas serán aceptables para construir un sistema axiomático. En la lógica subyacente habrá que contar por tanto con una *morfología*, expresada por medio de *reglas morfológicas* que permiten decidir si una expresión determinada se ha construido correctamente o no. Las reglas morfológicas establecen qué tipo de construcciones y combinaciones entre símbolos son válidas, lo cual permite, utilizando los términos de la lógica y los términos específicos del sistema axiomático, conformar las cuasiproposiciones del mismo.

D. Tendremos también las *reglas de deducción*, puramente formales, que son las que permiten deducir, según la lógica tradicional, proposiciones a partir de otras proposiciones, pero aquí, en el caso de los sistemas axiomáticos, cuasiproposiciones a partir de cuasiproposiciones. Sin estas reglas no sería posible, como hemos de analizar más adelante, obtener consecuencias a partir de las que hemos llamado suposiciones iniciales o cuasiproposiciones "de punto de partida".

E. Debemos contar finalmente con las *reglas de definición*, que son las que permiten, dada ya una parte del vocabulario, obtener nuevos vocablos, con lo cual el vocabulario se enriquece. La teoría de la definición de la lógica aristotélica es muy pobre e insuficiente, y que hay que tomar todos los recaudos que toma la lógica contemporánea a propósito de cómo se definen los términos.

El vocabulario y las cuasiproposiciones

Es necesario ahora explicitar, y ello es característico de cada sistema axiomático, lo que vamos a llamar el *vocabulario* con el cual se construirá el discurso. El vocabulario, por supuesto, está constituido en parte por los términos lógicos presupuestos, pero además por los términos específicos del sistema axiomático. En la geometría euclideana reformulada por Hilbert son las palabras o términos "punto", "recta", "plano", "entre", "congruencia" y "corresponderse mutuamente", pero en otros sistemas axiomáticos estas palabras primitivas pueden ser muy distintas.

Además del vocabulario lógico, provisto por la lógica subyacente, debemos agregar el vocabulario *específico*, es decir, el que es propio del discurso de un sistema axiomático, y que consta de: (a) los términos *primitivos*, que no se definen, y (b) los términos *definidos*, aquéllos que se definen según las reglas de definición proporcionadas por la lógica subyacente y que permiten introducir nuevos términos a partir de los que ya se tienen. Insistimos en que los términos específicos no tienen denotación, es decir, no se refieren a nada. En la geometría euclideana de Hilbert, "punto" es un término primitivo, pero no lo es "circunferencia en un plano", pues éste tiene una definición: "el conjunto de los puntos de un plano situados a igual distancia de un punto dado llamado centro". Desde luego, en un sistema axiomático, los términos primitivos tienen que respetar dos condiciones: (a) carecer de significado, y (b) tener una categoría asignada, es decir, se debe aclarar si se trata de vocablos de individuos, de propiedades, de relaciones, de funciones, etcétera, y de acuerdo con ello serán empleados.

Las reglas morfológicas nos permitirán ahora, utilizando los términos de la lógica y los términos específicos del sistema axiomático, formar las cuasiproposiciones del mismo[2]. Serán dichas reglas, precisamente, las que habrán de decidir si una expresión es legítima o no; y en caso afirmativo diremos que la expresión es *bien formada*, o sea, es una auténtica cuasiproposición. Por ejemplo, decir que "un punto está ubicado entre otros dos" es legítimo, pero decir "punto o punto, recta y distancia" es una locución sin el menor sentido a pesar de que está construida usando los términos de la geometría. La morfología nos dice, en suma, cuáles son las cuasiproposiciones o expresiones bien formadas del discurso con el que trabajaremos luego. Las cuasiproposiciones, insistimos una vez más, no tienen referencia o significado puesto que están conformadas por términos primitivos y definidos, que no los tienen.

2 A las cuasiproposiciones se las llama a veces *fórmulas*, denominación que nosotros no emplearemos. Sin embargo, véanse más adelante nuestras consideraciones sobre los *sistemas sintácticos*, en el tratamiento de los cuales la denominación *fórmula* se emplea con mayor frecuencia.

Disponemos entonces de parte de la estrategia necesaria para construir un sistema axiomático. Sinteticémosla. Adoptamos una lógica presupuesta, un vocabulario específico (términos primitivos, sin designación y que pertenecen a distintas categorías, y términos definidos, introducidos a partir de los primitivos por las reglas de definición y que tampoco denotan). Estamos en condiciones ahora de construir cuasiproposiciones, las expresiones lingüísticas que, de acuerdo con las reglas morfológicas de la lógica subyacente, estarán bien formadas, es decir, serán lógica y gramaticalmente correctas. Insistimos en que estas cuasiproposiciones, aunque tengan un "aire de familia" con las auténticas proposiciones, no están sujetas a cuestiones de verdad y falsedad; para que ello ocurriese habría que devolverles el sentido o denotación que sus términos específicos no tienen y entonces sí, de las proposiciones que resultasen se podría predicar su verdad o falsedad. Por consiguiente, la noción de verdad clásica, en el sentido aristotélico, no se puede aplicar a los sistemas axiomáticos, pues las cuasiproposiciones no "describen" nada que se pueda poner en correspondencia con entidades o hechos determinados que estén fuera del lenguaje. Aunque a veces los matemáticos empleen la palabra "verdad" cuando tratan con sistemas axiomáticos, lo hacen en un sentido diferente que discutiremos más adelante. Pero éste no se refiere a la "verdad" tal como la concebía Aristóteles.

Los axiomas y los teoremas

Los axiomas constituyen un conjunto de cuasiproposiciones elegido arbitrariamente como punto de partida del "juego" que nos proponemos desarrollar[3]. Si adoptásemos rígidamente el punto de vista aristotélico, el número de axiomas debería ser finito, y ello es así en los sistemas axiomáticos más utilizados en matemática. Pero tal condición no es necesaria. También pueden existir sistemas axiomáticos con infinitos axiomas, siempre que dispongamos de una regla que permita decidir, frente a una cuaslproposición, si ésta es o no un axioma. Los axiomas, insistimos, son arbitrarios, como lo son los puntos de partida de las fichas de un ajedrez cualquiera. A la pregunta de por qué se eligen éstos y no aquéllos, las únicas respuestas que podría ofrecer el constructor de un sistema axiomático serían del género "porque tal vez a partir de aquí obtenga teoremas interesantes" o "para ver qué pasa" o incluso "porque me da la gana". Es una justificación frecuente, pero, como hemos de analizar luego, a los sistemas

3 Las palabras "axioma" y "teorema" se emplean aquí en homenaje a Aristóteles, si bien, como recordará el lector, su significación en el marco del pensamiento aristotélico es bien diferente, ya que se aplican, respectivamente, a *verdades primarias, evidentes*, y a *verdades deducidas a partir de ellas*. Pero, como acabamos de señalar, la noción de "verdad" de Aristóteles carece de sentido en el caso de los sistemas axiomáticos.

axiomáticos formales se los puede *interpretar*, dotándolos de contenido semántico, y entonces harán referencia a algún sector de la realidad investigada por alguna ciencia fáctica como la física o la biología. La elección de un sistema formal y no de otro, en estos casos, bien podría deberse a la sospecha de podrán serán útiles al ser interpretados y pasar a formar parte de una "ciencia aplicada". Desde luego, esta libertad de escoger axiomas tiene una consecuencia: axiomas diferentes producirán sistemas axiomáticos también diferentes.

Al llegar a este punto, ya estamos en condiciones de llevar a cabo el ejercicio de deducir consecuencias a partir de los axiomas y obtener teoremas. Ello es posible porque, aunque estemos tratando con cuasiproposiciones y no con proposiciones, la lógica que estamos empleando es formal y permite decidir si un razonamiento es correcto o no lo es, atendiendo a la forma de las premisas y de la conclusión y no a su contenido o significado. (Esto último es precisamente lo que se quiere decir cuando se afirma que la lógica subyacente del sistema axiomático es *formal*, según la cuarta acepción del término "formal" que presentamos anteriormente.) Los teoremas así obtenidos también serán cuasiproposiciones, pues los axiomas lo son, y no puede decirse, por tanto, que sean verdaderos o falsos. Sencillamente, la condición de teorema es similar a la de una posición lícita en el ajedrez: se ha arribado a él a partir de los axiomas, utilizando correctamente las reglas de la lógica. Esta actividad de obtener teoremas, en principio, sería interminable, pero sucede que no todos los teoremas son interesantes y ello podría establecer límites explícitos y conscientes a la tarea de operar con lo que Galileo llamaba "la inmensa máquina de producir infinitas conclusiones". Si queremos seguir utilizando un vocabulario aristotélico, podríamos decir que las deducciones a partir de los axiomas son *demostraciones*, y así lo entenderemos nosotros, pero haciendo la salvedad de que, para Aristóteles, la demostración transita desde verdades primarias a verdades secundarias, mientras que aquí estamos tratando con cuasiproposiciones de las que no se puede predicar su verdad o falsedad. Por otra parte, una vez fijados los axiomas, decidir si una cuasiproposición es o no un teorema ya *no es* cuestión de arbitrio: tiene que mostrarse que proviene de una demostración. A nuestro constructor de un sistema axiomático, ahora, le está vedado decir que acepta un teorema simplemente "porque le da la gana".

Los puntos anteriores caracterizan, desde una perspectiva moderna, a un sistema axiomático formal y al método que se ha seguido para su edificación; de hecho, la matemática contemporánea es en gran parte la investigación de sistemas axiomáticos. En principio, el matemático puede investigar cualquiera de ellos, y la elección recaer en el mayor o menor grado de interés que manifieste por éste o aquél. Sin embargo, si bien el sistema axiomático elegido puede resultar interesante por razones un tanto lúdicras, también puede serlo porque a partir de él, en un sentido que luego analizaremos y que ya hemos adelantado, se podrían obtener importantes aplicaciones a distintas ciencias.

Los sistemas axiomáticos desde un punto de vista filosófico

Una primera cuestión filosófica que se presenta ahora es la siguiente: ¿se puede utilizar o no la noción de "verdad" para los sistemas axiomáticos? El punto quedará más claro luego, cuando hayamos introducido las nociones de "interpretación" y de "modelo", pero podemos adelantar algunas reflexiones sobre el problema. Ya señalamos que el concepto aristotélico de verdad, dada la alusión semántica que involucra y que por tanto se refiere a la verdad o falsedad de proposiciones, no se aplica a las cuasiproposiciones de los sistemas axiomáticos. Sin embargo, en el caso de éstos, es posible emplear la palabra "verdad" en un sentido muy diferente de aquél en que lo entendía Aristóteles. Si, para los lógicos contemporáneos, "sintaxis" se refiere a las formas de las expresiones, y "semántica" a su significado y contenido, en el caso de los sistemas axiomáticos la dimensión sintáctica está presente, aunque no la semántica. Podemos, entonces, introducir una noción de "verdad sintáctica", de acuerdo con la cual *una cuasiproposición es verdadera si y solo si es teorema*, o sea, si se puede demostrar a partir de los axiomas. De allí que habitualmente se afirme sencillamente que, en matemática, "verdad" significa *deducibilidad a partir de los axiomas*, es decir, *demostrabilidad*. Nada prohíbe que se utilice la palabra "verdad" en este sentido sintáctico, pero no debe confundirse con el aristotélico, de carácter semántico.

Abordemos ahora una segunda pregunta: desde el punto de vista filosófico, ¿qué trascendencia tiene la noción de sistema axiomático formal? La palabra "formal" tiene varias acepciones, pero, como ya hemos señalado, en este caso nos dice que a los términos primitivos del sistema no le hemos dado significado, y que sólo nos hallamos ante una estructura sintáctico-lógica. Pese a ello, la tentación inmediata sería recoger una idea de los primeros geómetras no euclideanos, según la cual podría pensarse que un sistema axiomático describe una realidad posible, como en los relatos de ciencia ficción, o como lo pensaba Husserl con su teoría de las ontologías regionales. Si así fuese, la matemática sería una especie de *teoría de lo posible*, y en particular una teoría de estructuras objetivas posibles, y entonces su importancia filosófica radicaría en que la actividad del matemático consistiría en realizar una suerte de *excursión por lo posible*. Algunas ramas de la matemática serían algo más que esto; por caso, la aritmética sería una teoría de esos peculiares objetos llamados "números", y la geometría euclideana, contemplada con los ojos de Aristóteles, por ejemplo, investigaría las propiedades del espacio físico real. Desde el punto de vista filosófico, entonces, se podría aducir que no hay una "única matemática", sino dos: la primera, la matemática de lo posible, expresada por el método axiomático y el estudio de los sistemas axiomáticos, y la segunda, entendida como ciencia aristotélica, la que estudia las propiedades de la realidad y nos informa acerca del mundo. En este sentido, el método axiomático ha sido una especie de advertencia de que

la matemática no era únicamente lo que se pensaba en la época de Aristóteles o en la época de Kant, y que cuando se plantean problemas de la geometría, por ejemplo, se tiene que aclarar si sólo se está hablando de lo posible o si se pretende hablar de lo real (en algún sentido de "lo real").

Ciertamente, de aquí en más, si un filósofo de la ciencia quiere hablar de una matemática aplicada a un determinado ámbito de problemas, tendrá que tener en cuenta que no tiene por qué creer que dicha disciplina es alguna clase de absoluto que ofrece principios válidos para todo terreno, momento y lugar. En primer término, la matemática brinda lo que podríamos llamar un "almacén de lo posible", propiedad del matemático; luego éste recibiría la visita de otros científicos (fácticos) quienes vendrían a hurgar en el susodicho almacén para decidir qué elementos extraídos de allí les pueden resultar útiles, concretamente algunos esquemas formales que les permitan hablar sobre entidades "de carne y hueso", en forma sustancial, de algún tipo de realidad. Señalemos por lo demás que, a partir de la revolución no euclideana, la matemática abandona un cierto carácter dogmático, pues el método axiomático y los sistemas axiomáticos que resultan de su aplicación muestran que en lugar de "verdades absolutas" habrá "verdades posibles", estudios de estructuras posibles, y esta actividad puede ser respetable no solamente en calidad de mero juego.

Los sistemas sintácticos y la matemática axiomática como lógica aplicada

La noción de sistema axiomático, tan marcadamente formal y abstracta, ha dado lugar a otra todavía más abstracta, llamada por algunos autores *sistema sintáctico*. La sintaxis, recordémoslo una vez más, se refiere a todo aquello que involucre signos y sus combinaciones, mientras que la semántica contempla el significado y la referencia dirigida hacia entidades externas al lenguaje. De hecho, un sistema sintáctico tiene semejanzas con un sistema axiomático, pero su grado de abstracción y distanciamiento con respecto al significado de las expresiones y a los aspectos semánticos del lenguaje se hace muchísimo mayor. ¿Qué es un sistema sintáctico? Está constituido por *signos* a los cuales no se les atribuye ninguna significación ni categoría, por *expresiones* o *fórmulas* arbitrarias constituidas por *sucesiones finitas de signos*[4] y, en particular, por una subclase de tales expresiones denominadas *expresiones bien formadas*. La condición de "bien formadas" de las expresiones quiere decir aquí que se las ha construido según un criterio puramente arbitrario pero que obliga a utilizar tales expresiones de cierta manera y no de otra. Si recurrimos a una analogía con el lengua-

4 Destacamos sin embargo que ciertos lógicos contemporáneos han investigado en forma detallada sistemas sintácticos que admiten como expresiones sucesiones de longitud *infinita*.

je ordinario, diríamos que una sucesión de letras como "bbcca" está mal formada desde el punto de vista gramatical; en cambio "papa", en lo que a nuestro lenguaje habitual corresponde, está bien formada. Pero este ejemplo es sólo una analogía, pues, a diferencia del lenguaje ordinario, que lleva implícito en su criterio para reconocer expresiones bien formadas el que tengan cierto tipo de significación (la palabra "papa" la tiene, designa a una planta o un tubérculo), los sistemas sintácticos son por completo ajenos a ella.

En cierto modo un sistema sintáctico es como un *cálculo*, y así a veces se lo denomina, de lo cual resulta comprensible que muchos autores utilicen la palabra *fórmula* para designar a las expresiones del mismo. Un cálculo matemático es muchas veces eso: una manipulación de signos y expresiones que no tiene en cuenta significados, sino, simplemente, propiedades formales. Se eligen ciertas expresiones "interesantes" pero no significativas y lo que se aprende, según ciertas reglas del sistema que se establecen, es a manipular con ellas. Los componentes de un sistema sintáctico serían, entonces, para comenzar: 1. *signos*; 2. *expresiones* o *fórmulas*, es decir, sucesiones de signos; 3. *expresiones bien formadas* según determinadas *reglas de formación*. Ahora debemos elegir algunas de ellas como punto de partida de nuestras manipulaciones, a las que se acostumbra a llamar también *axiomas*, una peculiar combinación de signos sin significado. Luego, en lugar de reglas lógicas, aparecen las denominadas *reglas de transformación, o de producción*, que permiten obtener expresiones bien formadas a partir de otras. (Algunos autores las denominan *reglas de inferencia*, pero aquí la palabra "inferencia" nada tiene que ver con lo que tradicionalmente se ha llamado así, por lo cual es preferible evitar esta nomenclatura.) Y finalmente tenemos los *teoremas*, que son las expresiones bien formadas obtenidas por las manipulaciones que permiten las reglas de transformación a partir de las expresiones de punto de partida, los axiomas. Destacamos que las reglas de transformación *son completamente convencionales y arbitrarias*, y no están guiadas necesariamente por consideraciones gramaticales o lógicas.

Semejante clase de estructura de carácter computacional tiene mucho interés, porque los sistemas de lógica que actualmente se utilizan en la lógica formal, al igual que las nociones de "algoritmo" y de "lenguaje puramente formal" empleados en informática, por ejemplo, van mucho mas allá de lo que hemos llamado "matemática pura", es decir, la visión axiomática de la matemática. De allí que sea necesario señalar una distinción muy importante: lo que hace que un sistema axiomático, tal como lo hemos presentado anteriormente, no sea un sistema sintáctico cualquiera, es que *las reglas de transformación son reglas de deducción lógica* en el sentido tradicional en que se suele entender la deducción. Ello justifica que, cuando tratamos con sistemas axiomáticos, tengamos que hacer lo propio con categorías y símbolos lógicos de la lógica subyacente. Las fórmulas bien formadas, en el caso de los sistemas axiomáticos, son las que la "gramática lógica" reconoce como cuasiproposiciones, y las reglas de transformación son las reglas de deducción que permite la lógica contemporánea para

obtener conclusiones a partir de ciertas premisas. En cambio, en un sistema sintáctico cualquiera, que no sea un sistema axiomático, las reglas de transformación podrían ser arbitrariamente fijadas para generar expresiones bien formadas a partir de otras sin necesidad de apegarse a las reglas lógicas de deducción.

En este punto, el lector podrá preguntarse: ¿y por qué no tomar la posición más general, la del sistema sintáctico, a propósito de la matemática? Aquí debemos insistir en que un sistema axiomático es efectivamente un caso particular de sistema sintáctico, en el que ni los términos primitivos ni las cuasiproposiciones tienen significación, pero en donde las reglas de transformación no son cualesquiera, sino las reglas deductivas de una lógica formal. Esta elección se funda en la esperanza de que el lenguaje del sistema axiomático pueda, en lo que luego llamaremos una *interpretación* del mismo, recobrar el significado que no le hemos dado. Los sistemas axiomáticos admiten, potencialmente, referencia o significación, por medio de interpretaciones en que los axiomas se transforman en verdades y en donde los teoremas, por consiguiente, habiendo sido obtenidos por reglas correctas de deducción, deben ser verdaderos también. Esta potencialidad es de la mayor trascendencia para la matemática aplicada a la física, la estadística, la economía y muchas otras ciencias fácticas.

El método axiomático, como ya lo hemos sugerido, genera una colección de discursos sobre entidades posibles, y tiene en potencia todas las características de un lenguaje con poder semántico, que aparecerá en el momento en que hagamos una interpretación. Mientras ello no se haga, el discurso de la matemática será vacuo, pero también lo es el de la lógica tradicional como ciencia de la deducción, pues no atiende al contenido sino a la forma y justifica la corrección y la transmisión de la verdad como características formales de los razonamientos. Como ello es precisamente lo que se procura hacer con los sistemas axiomáticos, puede decirse que un sistema axiomático parece ser *lógica aplicada*, pues lo que se hace con ellos es tomar ciertas cuasiproposiciones y averiguar qué puede deducirse formalmente a partir de ellas. Hasta allí no hay, por supuesto, ninguna pretensión informativa, y el sistema axiomático tiene simplemente la característica de un juego lógico en el marco del cual se investigan las propiedades formales de un mundo posible. De todas maneras, conviene adelantar que, al afirmar que los sistemas axiomáticos de la matemática pertenecen al campo de la lógica aplicada, estamos sosteniendo una versión de la llamada *tesis logicista*, según la cual la matemática pura o axiomática no es más que un capítulo de la lógica. Pero, como analizaremos más adelante en este libro, esta tesis ofrece dificultades y no es aceptada por todos los filósofos de la matemática.

Interpretaciones y modelos: acepción semántica

En nuestra discusión anterior ha aparecido varias veces la idea de que el lenguaje "vacío" de un sistema axiomático puede admitir lo que en términos se-

mánticos llamaríamos una *interpretación* del mismo. Es conveniente señalar que aquí estamos empleando la palabra "interpretación" para indicar la asignación de significado a aquello que no lo poseía. No se debe confundir este uso del vocablo con otros, tal como el de descubrir un significado, oculto o impreciso, ya presente en una expresión. Una interpretación de un sistema axiomático es un diccionario que tiene dos columnas, la de la izquierda y la de la derecha. La primera está formada por la lista de los términos primitivos del sistema axiomático; y en la segunda se indica el significado que se dan a los términos de la columna izquierda. Así, por ejemplo, considerando a la geometría euclídea como un sistema axiomático, podemos imaginar a un físico dedicado al estudio de la luz estableciendo traducciones que hagan corresponder "punto" (izquierda) con "foco luminoso" (derecha) y "semirrecta" (izquierda) con "rayo luminoso" (derecha), en el marco de la llamada *óptica geométrica*[5].

El mencionado diccionario transforma al sistema axiomático en un lenguaje comunicativo con el cual podemos hablar acerca del mundo por medio de afirmaciones que podrán ser verdaderas o falsas. Por ejemplo, la afirmación "de un punto parten infinitas semirrectas" se transforma ahora en la proposición "de carne y hueso" siguiente: "de un foco luminoso parten infinitos rayos luminosos". A esta proposición, cuyos términos ahora tienen significado, le podemos aplicar el criterio aristotélico de verdad para decidir si es verdadera o falsa, lo cual requiere del concurso de un físico o un óptico provisto de instrumentos para realizar, por ejemplo, los experimentos pertinentes con focos y rayos de luz. Sin embargo, aquí ya podemos adelantar que, dado que hablamos de *cualquier* foco luminoso y en principio no podemos inspeccionarlos a todos, la proposición conformaría una *hipótesis* para un sistema hipotético deductivo de la óptica. (Analizaremos este punto en el Capítulo 9.) Pero esta exploración pertenece exclusivamente al terreno de las ciencias físicas.

En un sistema axiomático, a los términos primitivos no se les da significado o denotación, pero sí categoría: "punto" o "entre", por ejemplo, poseen categorías distintas. Cuando se realiza una interpretación de un sistema axiomático, dichas categorías deben ser respetadas, para evitar que se produzca un absurdo gramatical. Si la palabra "punto" se ha entendido como un término genérico que se refiere a individuos, no debe ocurrírsenos interpretarla como verbo, por ejemplo, porque de ello resultaría un completo dislate.

Es importante advertir que los axiomas de un sistema axiomático formal, que son cuasiproposiciones, por medio de la interpretación se convierten ahora en proposiciones que pueden ser verdaderas o falsas. Dicho de otro modo, nada nos garantiza que, dada una interpretación, los puntos de partida de nuestros razonamientos sean verdaderos. Si el diccionario hubiera sido algo tan antojadizo

5 Este ejemplo es puramente intuitivo y tiene fines didácticos. Si se lo quiere plantear de manera rigurosa, entraríamos en un terreno de gran complejidad que no trataremos aquí.

como para traducir "punto" por "conejo", "recta" por "zanahoria" y "pasar por" por "poder comer", la afirmación "dados dos puntos, hay una y solo una recta que pasa por ellos" se transformaría en "dados dos conejos, hay una zanahoria y solo una que pueden comer los dos conejos", lo cual es falso. Todo ello muestra que existen interpretaciones afortunadas e interpretaciones no sólo poco afortunadas sino también un tanto ridículas, de las que se desprenden variados disparates. Pero en cualquier caso, el sistema axiomático formal se habrá transformado en un *sistema axiomático interpretado*, que tiene contenido semántico.

Sin embargo, y aquí aparece lo importante, puede suceder, y de hecho es lo que ocurre en muchos ejemplos, que *el diccionario haga verdaderos a todos los axiomas*, lo cual se suele expresar de manera poco rigurosa diciendo que "los axiomas se cumplen". Desde luego, esta puntualización sobre verdades no corresponde a la lógica, sino, por ejemplo, a la física o la economía. Pero si ello ocurre, el sistema axiomático se transforma en algo así como una "teoría verdadera" acerca de una determinada temática, tal como la óptica o la aritmética. Y corresponde señalar que, *si todos los axiomas se han transformado en proposiciones verdaderas* entonces, a la vez, *todos los teoremas se habrán transformado en proposiciones verdaderas*. Aquí se descubre la clave de por qué hemos impuesto la condición de que en un sistema axiomático, para obtener teoremas, debemos emplear reglas de deducción lógica en lugar de reglas arbitrarias de algún otro sistema sintáctico. Porque las reglas de deducción lógica involucran formas de razonamiento correctas, y en tanto tal, tienen formalmente la garantía de conservación de la verdad: si en una interpretación los axiomas se transforman en proposiciones verdaderas, con los teoremas debe acontecer lo mismo. En particular puede haber, por caso, una interpretación dada por un diccionario perteneciente a las ciencias físicas, y si se pudiera establecer que los axiomas se transforman en proposiciones verdaderas, automáticamente todos los teoremas que el matemático ha demostrado se convertirán, una vez hecha la interpretación, en proposiciones verdaderas para esa investigación física. Sin embargo, debemos insistir en que, en las ciencias fácticas como la física, las interpretaciones de los axiomas conducen generalmente a proposiciones hipotéticas, cuya verdad se admite provisionalmente, y que por tanto llevarán a proposiciones igualmente hipotéticas que tendrán el carácter de presuntas verdades hasta que, por medio de contrastaciones empíricas, se puedan hallar razones que nos den indicios acerca de su verdad o falsedad. Esto último, sin embargo, no siempre es posible.

La matemática pura resultaría, de esta manera un tanto sorprendente, una especie de actividad vacua, pero potencialmente aplicable a investigaciones científicas acerca de determinado tipo de problemas, aritméticos, geométricos, físicos o económicos. Todo lo cual muestra que la disciplina no es necesariamente un mero juego puro y abstracto, sino que en principio puede tener aplicaciones que la hacen a veces indispensable para investigar en los territorios característicos que constituyen las distintas ciencias. Ello ocurre incluso dentro de la propia matemática, porque la interpretación de un sistema axiomático puede ser

realizada sin abandonar el campo de la matemática misma; por caso, el diccionario puede mencionar, en su segunda columna, números, conjuntos o figuras geométricas.

Cuando los axiomas de un sistema axiomático formal y por tanto sus teoremas se transforman, a través de una determinada interpretación, en proposiciones verdaderas, llamaremos a dicha interpretación un *modelo* del sistema, que sería algo así como una "interpretación correcta" o "adecuada" del mismo. De acuerdo con ello, la matemática sería un procedimiento "por anticipado" para proporcionar verdades a todos aquellos que descubren, en el transcurso de una investigación, que se hallan ante un modelo de un sistema axiomático. En ese caso, el matiz de "juego" que presentaba la matemática se convierte ahora en una cosa muy distinta: en un instrumento gracias al cual el científico de pronto puede encontrarse con abundantes lotes de verdades en su propio campo de investigación, verdades que quizás él mismo no hubiera podido obtener directamente, lo cual supone eventualmente un ahorro de esfuerzo.

Interpretaciones y modelos: acepción sintáctica

Una interpretación de un sistema axiomático, como ya señalamos, es un diccionario que tiene dos columnas, la de la izquierda (conformada por la lista de los términos primitivos del sistema axiomático) y la de la derecha (donde se indican los significados otorgados a los términos de la columna izquierda). El diccionario no establece en la columna derecha las entidades que estarían denotadas en la interpretación, sino expresiones del lenguaje, ahora significativo, que inevitablemente hay que utilizar si queremos aludir a tales entidades. De ahora en adelante, en nuestras consideraciones, no tendremos reservas en pensar que la columna de la derecha está constituida por entidades, pero en realidad estaremos abreviando la indicación de que la "traducción" opera entre términos y expresiones de la columna izquierda y términos y expresiones de la columna derecha.

Cuando realizamos la interpretación de un sistema axiomático formal de tal manera que el diccionario hace corresponder los términos específicos sin designación del sistema con expresiones que aluden a rayos de luz o conejos, dicha interpretación hará referencia a entidades y será, de tratarse de un modelo, de utilidad para diversas ciencias. Sin embargo, existe la posibilidad de concebir la interpretación de un sistema axiomático *sobre otro sistema axiomático*, de tal modo que los términos del primero se correspondan con expresiones no significativas del segundo. En esta segunda acepción, el discurso del primer sistema no tiene contenido semántico pero el segundo tampoco, *y no pareceríamos estar en presencia de una auténtica interpretación*, porque las cuasiproposiciones del primer sistema se transforman, no en legítimas proposiciones, verdaderas o falsas, sino en cuasiproposiciones del nuevo sistema.

Sin embargo, este tipo de interpretación "puramente sintáctica" es frecuente y legítima. Lo que sucede es que a los axiomas y teoremas del segundo sistema no le podemos aplicar la noción semántica de "verdad" de Aristóteles para decidir si son verdaderos o falsos, ya que carecen de contenido semántico. Tendremos que emplear la noción de "verdad sintáctica", que hemos definido anteriormente: *una cuasiproposición es verdadera si y solo si es teorema*, o sea, si se puede demostrar a partir de los axiomas. Y si se quiere conservar la noción de "modelo", exigir que la interpretación convierta en verdaderos a los axiomas significa meramente que aquélla transforma los axiomas del primer sistema en teoremas del segundo. A este tipo de modelo se lo suele llamar *modelo relativo* del sistema.

Todo lo cual muestra que se puede entender la palabra "modelo" en dos sentidos distintos. En el primero, se admite la noción de verdad semántica de Aristóteles; en la segunda, la de verdad sintáctica como "demostrabilidad a partir de los axiomas", es decir "ser teorema". Adviértase que, aunque este segundo tipo de interpretación no agrega significado a las cuasiproposiciones traducidas, es necesario, por cuestiones morfológicas, respetar las categorías de los términos. La noción de modelo, en ambas acepciones, es importantísima, como quedará en claro más adelante.

Una digresión: los modelos en las ciencias fácticas

La noción de "modelo" que hemos presentado, aplicable a los sistemas axiomáticos de la matemática, debe ser diferenciada de aquella que se aplica en las ciencias fácticas como la física, la química o la biología, radicalmente distinta. Debemos tener en cuenta que, cuando se construyen teorías para estas disciplinas, tratamos con sectores de la realidad que pueden comprometernos con un gran número de factores, cuyo análisis simultáneo puede ser excesivamente arduo y complejo. De allí que los científicos deban necesariamente proceder a un "recorte" del ámbito de estudio, dejando fuera de consideración algunos de tales factores en la suposición de que son irrelevantes para la cuestión que será abordada o bien que su incidencia en la misma es mínima y por ende poco significativa. El lector recordará quizás la "palanca ideal" con la que trató en algún curso de física. Aquí se considera que factores tales como el color o la temperatura de la palanca son irrelevantes y que, si bien se admite que las palancas reales tienen un peso determinado y están sometidas a fuerzas de rozamiento, no se los tiene en cuenta para el análisis: son "despreciables". A estos "recortes" del sector de la realidad en estudio, en el ámbito de las ciencias fácticas, se los suele llamar *modelos* de la entidad real.

La ventaja de tratar con modelos sencillos en las ciencias fácticas es su accesibilidad para el análisis; la desventaja, que el "despojamiento" de factores reales puede conducir a formular teorías fácticas que no se correspondan (aun te-

niendo en cuenta los errores experimentales) con los resultados obtenidos empíricamente en el sistema real. En este caso, habrá que volver atrás y producir un nuevo "recorte", más limitado, que incluya alguno de los factores que anteriormente se habían desdeñado. Si ahora, por caso, tenemos en cuenta el peso de la palanca, el nuevo "recorte" conformará un nuevo modelo, llamado habitualmente "palanca pesada", cuyo estudio será más complejo que el de la palanca ideal aunque los resultados que se obtengan de su estudio resultarán más acordes con el comportamiento de las palancas reales tal como se manifiesta empíricamente. De hecho, las teorías fácticas tratan con tales modelos y no con la realidad en toda su complejidad, una premisa establecida por Galileo en los orígenes de la ciencia moderna.

Como hemos de analizar en el Capítulo 8, existe un proceso inverso al de la interpretación que consiste en considerar un discurso significativo, como el de las teorías fácticas, y quitarle todo contenido semántico, obteniéndose así un sistema axiomático formal: se dice que el sistema axiomático *formaliza* el problema que estábamos investigando en términos semánticos. Ésta es la tercera acepción de "formal" que introdujimos a comienzos de este capítulo. Hechas estas salvedades para el lector interesado, aclaremos que la noción de "modelo" que hemos de emplear en este libro es la primera, es decir, la de "interpretación correcta" de un sistema axiomático formal[6].

Matemática pura y matemática aplicada

Aunque ya nos hemos permitido usar las palabras "pura" y "aplicada" con relación a la matemática, aclararemos aquí con mayor detalle dicha caracterización. Diremos que estamos efectuando investigaciones de la especie matemática *pura* cuando inventamos sistemas axiomáticos e investigamos cuáles son sus teoremas; en cambio, diremos que la investigación será de matemática *aplicada* cuando hemos interpretado un sistema axiomático y esta interpretación resulta ser un modelo en que los axiomas y teoremas nos han de proporcionar verdades. Si esto es así, ambas especies de matemática son igualmente importantes; aunque indudablemente se trata de actividades distintas, están relacionadas entre sí. Se ha dicho alguna vez que la matemática es una "ciencia vacía" o "ciega", pero ello sólo puede ser afirmado de la matemática pura. No lo es, en cambio, si tratamos con la matemática aplicada, pues en cada modelo estamos realmente no ante cuasiproposiciones ("vacías" o "ciegas"), sino ante proposiciones "de carne y hueso" que pretenden ofrecer conocimiento acerca de números, figuras, cuerpos físicos, seres vivos o poblaciones humanas.

6 Sobre estas distintas acepciones de la palabra "modelo", véase Lombardi, O., "La noción de modelo en ciencias", *Educación en ciencias*, UNSAM, vol. II, n. 4, 1998, pp. 5-13.

gico (deductivo) que nos permite obtener cuasiproposiciones a partir de otras ya conocidas, extender la matemática tratando de construir nuevas demostraciones y, sobre todo, crear nuevos sistemas axiomáticos no conocidos anteriormente. En cuanto a la cuarta pregunta, que se refería a la relación entre la matemática y lo real, habrá que responderla diciendo que dicha ciencia "pura" no se refiere a realidad alguna.

Pero las respuestas a nuestras preguntas difieren notoriamente de las anteriores cuando las formulamos a propósito de los modelos de la matemática aplicada. Aquí la matemática habla de aquello que se ha escogido para realizar la interpretación, y entonces los "objetos de la matemática" pueden ser prácticamente cualesquiera: números, planetas, conejos, mercancías, seres humanos. ¿Y cuáles son las razones por las cuales el matemático aplicado acepta las proposiciones de la matemática? Su tarea consiste en investigar si la interpretación que le está dando a un sistema axiomático constituye o no un modelo del mismo; si la respuesta es afirmativa, la mera existencia del modelo justifica la verdad de las proposiciones con las que está operando: la de los axiomas, que ahora se han convertido en proposiciones verdaderas, y la de los teoremas, que necesariamente también han de serlo. La tercera pregunta, aquí, se respondería diciendo que el conocimiento se expande a medida que hallamos nuevos modelos en diversos campos de la ciencia; y en cuanto a la cuarta, no cabe duda de que los modelos de la física, la química o la biología, por caso, pese al carácter hipotético que tienen, pretenden referirse a la realidad.

Matemática, conocimiento y metaconocimiento

El conocimiento, a nuestro juicio, se expresa por medio de afirmaciones, posición que supone tomar partido en favor de una aproximación lingüística a la cuestión filosófica acerca de *cómo* y *de qué manera* conocer. No es la única. En su análisis de la ciencia, ciertos filósofos ponen el énfasis en lo que conciben como un determinado modo de *pensamiento*, especialmente privilegiado: el pensamiento científico. Pero el pensamiento es privativo de quien lo crea, y sólo se transforma en propiedad social si se lo comunica a través del lenguaje. Sin libros, artículos o clases la ciencia no sería posible. El lector no se debe sorprender, por tanto, de que en este libro adoptemos un enfoque lingüístico del fenómeno científico, sobre todo en relación con el examen de sus productos, por cuanto socialmente la ciencia como cuerpo de conocimientos se ofrece bajo la forma de sistemas de afirmaciones. Ello se corresponde con una tendencia característica de este momento de la historia de la cultura, como es la de privilegiar el papel del lenguaje en el análisis del arte, de las sociedades o del hombre, y también en otros campos como el de la lógica.

No escapa a tal regla el conocimiento matemático, y por ello los sistemas axiomáticos formales de la matemática, en el ámbito de la matemática pura, o

bien sus modelos, en el de la aplicada, son los destinados a expresarlo. En primer lugar, el desarrollo de un sistema axiomático permite, ante una interpretación fáctica adecuada, conocer, en el sentido clásico de la palabra, que sus afirmaciones son (hipotéticamente) verdaderas. En segundo lugar, el desarrollo de un sistema axiomático por sí mismo permite saber que ciertas cuasiproposiciones son teoremas del sistema, lo cual no siempre es acorde con la intuición. Hay teoremas, en el estado actual de la geometría de Euclides-Hilbert, que son totalmente incompatibles con lo que nuestra intuición nos dicta. A modo de ejemplo, basta recordar algunas de las versiones del llamado "teorema de Tarski-Banach" que afirma que toda esfera de radio r puede dividirse en n partes tales que, al ser reunidas nuevamente, dan lugar a una esfera de radio r', donde r' es *desigual* a r. Vale la pena por tanto la tarea deductiva en matemática porque puede mostrar, entre otras cosas, que hay resultados que en los modelos del sistema pueden violentar nuestra intuición. Finalmente, un sistema axiomático es una estructura lingüística a la cual se la puede estudiar del mismo modo en que un físico lo hace con una teoría acerca de la luz o del movimiento planetario.

Para muchos epistemólogos deberíamos decir que el estudio de un sistema axiomático ofrece un *metaconocimiento*; por ejemplo, es una importante ganancia de conocimiento saber que el sistema no lleva a ninguna contradicción (lo que luego llamaremos *propiedad de consistencia* o *coherencia*). El lector puede advertir la aparición aquí del prefijo *meta* para calificar cierto tipo de conocimiento. Este uso refleja la siguiente situación, válida para la discusión epistemológica en general: es necesario discriminar entre el conocimiento alcanzado *internamente* por una ciencia, que permite saber que ciertas entidades u objetos se comportan de cierta manera, del metaconocimiento, que se ocupa de la ciencia misma vista *desde fuera de ella* para establecer qué alcances y limitaciones posee tal o cual disciplina, y también, en algunos casos, si ella puede ser adecuada o no para analizar cierto sector de la realidad. Saber por ejemplo que la mecánica de Newton explica los movimientos de un péndulo y de qué manera lo hace es conocimiento científico, pero saber que dicha mecánica no es adecuada para el análisis de los problemas de la cosmología o del mundo atómico y subatómico es un metaconocimiento sobre dicha teoría. Como este estudio de una teoría puede dar lugar a su vez a un importante peculiar tipo de teoría *acerca de la anterior*, es costumbre referirse a ella como una *metateoría* correspondiente a la teoría dada. Vicente Fatone, el notable filósofo argentino, destacaba como una peculiar y significativa característica de la filosofía contemporánea (y de disciplinas afines) esta idea de un estudio "no interno" a una estructura sino externo a ella. Señalaba un antiguo precedente en palabras tales como "física" y "metafísica", por ejemplo, pero le sorprendía encontrar repetidamente esta distinción, en el campo lingüístico, por caso, entre "lenguaje" y "metalenguaje" (que trata *acerca* del lenguaje). Más adelante hallaremos distinciones similares entre "teoremas" y "metateoremas" o bien entre "matemática" y "metamatemática".

De manera análoga, es un conocimiento importante saber que un sistema tiene modelos y, en algunos casos, indicar con precisión cuáles son: todo ello pertenece al metaconocimiento del sistema.

A estas tres versiones del conocimiento matemático podríamos agregar una cuarta, que corresponde a la pericia en el manejo de cálculos y computaciones realizadas con las cuasiproposiciones. No cabe duda de que, en los cursos universitarios, gran parte de lo que se llama "conocimiento matemático" corresponde a la posesión de esta aptitud algorítmica que permite, por caso, resolver ecuaciones o hallar los volúmenes de cuerpos geométricos de gran complejidad.

En vista de lo presentado hasta este momento, se advierte la gran relevancia que para la matemática pura y aplicada tienen los sistemas axiomáticos formales, que hemos descrito de una manera genérica. Nuestro próximo paso será construir uno de ellos, de carácter muy elemental, para poder exponer, a propósito de un caso particular, los componentes característicos de tales sistemas: su lógica subyacente, sus términos, su morfología, sus axiomas, sus teoremas.

7

La construcción de un sistema axiomático

Un ejemplo sencillo de sistema axiomático: SAFO

Quizás debamos pedir disculpas al lector por el tenor de la exposición que sigue, que en ciertos momentos puede resultar un tanto árida. Si bien este libro tiene un carácter elemental, no queremos renunciar por ello al necesario detalle y rigor con que deben ser presentados, en su correspondiente orden, los diversos elementos a tener en cuenta a la hora de construir un sistema axiomático. Hemos optado por hacerlo así en virtud de que en ciertas presentaciones del tema, en libros de texto, advertimos ambigüedades y falta de precisión. Por ello la lectura de las páginas subsiguientes requerirá de una cierta atención particular.

Si una unidad fundamental de análisis en el campo de la matemática es el sistema axiomático formal, y es necesario estudiar sus propiedades, comenzaremos por proponer un ejemplo sencillo, a modo de ilustración y para fijar ideas al respecto, que utilizaremos después para analizar si satisfacen o no las propiedades que explicitaremos. Lo llamaremos *teoría del orden*, o bien, abreviadamente, SAFO, iniciales de "sistema axiomático formal para el orden". Analizaremos entonces cuáles serán los "ladrillos" necesarios que escogeremos para edificar dicho sistema axiomático y, a la vez, reiteraremos y ampliaremos algunas consideraciones sobre la construcción de un sistema axiomático ya adelantadas en el capítulo anterior.

Nuestro sistema SAFO deberá incluir, como ocurre con todo sistema axiomático, los siguientes elementos:

1. **Lógica subyacente**

A. *Categorías*
B. *Términos o símbolos lógicos*
C. *Morfología de la lógica subyacente*
D. *Reglas de deducción*
E. *Reglas de definición*

2. **Términos no lógicos (específicos) del sistema**

A. *Términos primitivos*
B. *Términos definidos*

3. Morfología del sistema
4. Axiomas
5. Teoremas

Como señalamos en el capítulo anterior, los términos del sistema (*lógicos*, pertenecientes a la lógica subyacente, y *específicos*, que corresponden al sistema axiomático particular que nos ocupa), conforman lo que a veces se llama el *vocabulario* del sistema. Utilizamos esta última expresión con cierta reserva, ya que tiene connotaciones gramaticales vinculadas con el uso de las palabras, mientras que los términos de la lógica y los términos específicos del sistema axiomático son solamente símbolos "vacíos", aunque luego, en alguna posible interpretación del sistema, se les otorgue un particular significado a los términos específicos.

1. Lógica subyacente. Para el sistema SAFO, la lógica subyacente o presupuesta será la llamada *lógica elemental de predicados con identidad*. En realidad, ya nos hemos referido a ella en el capítulo anterior al señalar que es la parte de la lógica en la que es posible mencionar ciertas entidades hacia las cuales se dirige nuestra atención, los *individuos*, y que nos permite afirmar propiedades y relaciones que les corresponden a ellos. Con esta lógica podemos también enunciar generalizaciones universales y existenciales acerca de tales individuos. Pero una exigencia que debemos respetar es que entre los símbolos lógicos (que introduciremos en breve) aparezca el que corresponde a la relación *idéntico a*, llamada de *identidad*, relación habitualmente indicada con el símbolo "$=$".

El lector advertirá que la palabra *individuo* no se emplea aquí con el sentido que posee en el lenguaje ordinario, y que se refiere a un ser humano (en general, de manera indeterminada, a un ser humano cualquiera). En lógica, tal palabra tiene un sentido muy diferente, que proviene de Aristóteles, quien fue el primero en adoptar un uso técnico peculiar del vocablo. Un individuo es un ejemplo *particular* de determinado tipo de entidades. En este libro emplearemos la palabra "individuo" de una manera algo más laxa: existen ciertas expresiones que llamaremos *constantes individuales*, cuya función será *aludir* a las entidades que en una determinada investigación constituyen la materia específica de estudio del campo científico en el que se trabaja. A estas entidades las llamaremos "individuos". Dicho de otro modo, las constantes individuales serán *nombres de individuos*. Así, en aritmética, los individuos serían los números; en geometría, los puntos, rectas o planos; en astronomía, planetas o estrellas; en física o química, átomos o moléculas.

La lógica a la que nos estamos refiriendo se emplea como lógica subyacente en muchos sistemas axiomáticos de la matemática, que por ello suelen llamarse *elementales*. Sin embargo, ya señalamos que para los sistemas más importantes de dicha disciplina es necesario utilizar lógicas más "fuertes", más abarcativas y complejas, en las cuales será posible hablar de entidades tales como

propiedades de propiedades, propiedades de relaciones, relaciones entre relaciones, etcétera. Mencionaremos algunas de ellas en el Capítulo 10. Pero, por el momento, nuestra lógica elemental de predicados con identidad será suficiente para la construcción del sistema SAFO.

Todas las lógicas mencionadas difieren en mucho de la antigua, venerable y prestigiosa lógica que nos legara Aristóteles, en particular en lo que atañe a su teoría del silogismo. Y en este punto el lector se puede preguntar: ¿por qué no emplearla? La razón es que la lógica silogística aristotélica es en realidad muy débil, y resulta insuficiente e ineficaz para las necesidades de la fundamentación de la matemática. A mediados del siglo XIX y comienzos del XX, las investigaciones en el campo de la lógica obligaron a ampliar y superar notablemente los límites impuestos por la lógica de Aristóteles. Hacía su aparición una nueva lógica, a la que en principio se llamó *logística*, denominación poco afortunada pues podría confundirse con el uso militar de esta palabra, relacionado con operaciones de aprovisionamiento en apoyo de las unidades de combate. Posteriormente la disciplina recibió dos denominaciones más apropiadas: *lógica matemática* y *lógica simbólica*. La primera se justificaba por la analogía entre los métodos algorítmicos de la nueva lógica y los de la matemática, pues era posible operar en ella de manera similar al modo en que se realizan cálculos aritméticos[1]. Ésta es una tradición que comienza con la obra de dos lógicos y matemáticos británicos, Augustus De Morgan (1806-1871) y particularmente George Boole (1815-1864). La otra denominación, lógica simbólica, se fundamentaba en el empleo de símbolos para representar las entidades, propiedades y operaciones de la nueva lógica. Se vincula con trabajos de lógicos como el italiano Giuseppe Peano (1858-1932), el alemán Gottlob Frege (1848-1925) y el británico Bertrand Russell (1872-1970). Pero hoy existe una tendencia a abandonar estas nomenclaturas y denominar simplemente *lógica* a la disciplina tal como se la concibe y emplea en las investigaciones del presente, punto de vista que adoptaremos. Desde luego, sería torpe y anacrónico, desde el punto de vista histórico, restar méritos a Aristóteles; por otra parte, su lógica silogística resulta ser un capítulo particular de la lógica elemental de predicados con identidad que emplearemos seguidamente para la construcción de SAFO.

La elección de una lógica subyacente para SAFO obliga a establecer en forma explícita los puntos que señalamos a continuación.

A. Categorías. Además de los términos o símbolos lógicos que introduciremos posteriormente (que sirven para obtener nuevas proposiciones a

1 Un *algoritmo* es un procedimiento que permite obtener determinado resultado por medio del uso *reiterado* de cálculos sencillos. Los métodos para multiplicar o dividir, obtener raíces cuadradas o el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de un número natural, son ejemplos de algoritmos.

partir de otras), habrá en nuestro discurso un distinto tipo de expresiones que se emplearán para referirse a las entidades que intervienen en el mismo. Para cada tipo de expresión, su categoría corresponde al tipo lógico o gramatical de la entidad acerca de la cual queremos hablar. En la lógica subyacente que hemos de emplear para construir SAFO, las categorías admitidas son:

- *Constantes individuales* o *nombres de individuos*, que se refieren a individuos;
- *Predicados de propiedad*, que se refieren a propiedades de individuos;
- *Predicados relacionales*, que se refieren a relaciones entre individuos.

B. Términos o símbolos lógicos. Aquí tenemos:

- *Conectivas proposicionales.* Son símbolos empleados en la llamada *lógica proposicional*, una parte de la lógica incluida en nuestra lógica subyacente, y que permiten construir proposiciones a partir de otras proposiciones. En particular tendremos la negación "no"; la conjunción "y"; la disyunción "o"; el condicional "si... entonces"; y el bicondicional "si y solo si". Al hablar de la morfología de la lógica subyacente detallaremos de qué modo se emplean estas conectivas.
- *Variables individuales.* Son análogas a las constantes individuales, pero en lugar de referirse a un *determinado* individuo admiten un "dominio de valores". No designan a un individuo en particular, pero aceptan que se les dé circunstancialmente un "valor" (un dado individuo) de acuerdo con las necesidades de la investigación que se realiza.
- *Cuantificadores.* Son el cuantificador universal, "para todo", y el existencial, "existe al menos", cuyo empleo comentaremos de inmediato.
- *Símbolo de identidad.* Se utiliza para indicar la identidad de individuos, y es considerado también un símbolo lógico ("="). Expresa la relación de identidad mencionada anteriormente.

C. Morfología de la lógica subyacente. Sabemos que la *morfología* indica las operaciones entre símbolos que permiten construir las cuasiproposiciones. Dadas dos cuasiproposiciones p y q, podemos obtener muchas otras, por ejemplo: "no p", "no q", "p y q", "p o q", "si p entonces q", "p si y solo si q". Pero es necesario discriminar entre la disyunción "o" en su sentido *incluyente* y la disyunción "o" en su sentido *excluyente*. Cuando se afirma "Se prohíbe el acceso a este local a menores de edad o vendedores ambulantes", se entiende que la prohibición *incluye* también a los vendedores ambulantes que sean menores de edad. Pero si en el menú de un restaurante se lee "El postre es helado o torta, a elección", se

comprende que podrá elegirse uno de ellos *pero no ambos*, y la proposición "El postre es helado o el postre es torta" *excluye* la posibilidad de escoger ambos. Dada esta ambigüedad del lenguaje ordinario, se suele recalcar el carácter incluyente de la disyunción diciendo "Se prohíbe el acceso a este local a menores de edad *y/o* vendedores ambulantes" y el de la excluyente diciendo "El postre es helado *o bien* torta".

La notación que se emplea en estos casos es sencilla, y por eso la introduciremos aquí. Se trata de aplicar a p y q, respectivamente, las ya mencionadas conectivas lógicas denominadas *negación* ("~"), *conjunción* ("∧"), *disyunción incluyente* ("∨"), *condicional* ("⊃") y *bicondicional* ("≡"). Además tendremos un símbolo especial para la *disyunción excluyente* ("∇"). En síntesis, simbólicamente, diremos:

$$\sim p \quad \sim q \quad p \wedge q \quad p \vee q \quad p \supset q \quad p \equiv q \quad p \nabla q$$

expresiones que se leen, respectivamente, "no p", "no q", "p y q", "p o q" (en sentido incluyente), "si p entonces q", "p si y solo si q" y "p o q" (en sentido excluyente). Advierta el lector que la ambigüedad que ocasiona "o" en el lenguaje ordinario, según destacamos anteriormente, queda eliminada al introducir el lenguaje simbólico, pues "∨" indicará la disyunción incluyente y "∇" la excluyente.

Con la expresión simbólica "aRb" indicaremos que el individuo a está relacionado con b a través de un término de relación R, que es un atributo o predicado acerca de dos individuos vinculados entre sí. En determinada interpretación, la relación será, en este caso, *diádica* o *binaria*, porque vincula solo *dos* entidades. Ejemplos de relaciones diádicas, en distintas interpretaciones del sistema, son *hijo de, padre de, amigo de, menor que, a la izquierda de, anterior en el tiempo a*, y así por el estilo. Si queremos afirmar que *todos* los individuos están relacionados con a a través del término de relación R, escribiremos $(\forall x)xRa$, empleando el cuantificador universal *para todo*, simbolizado "∀". En toda cuasiproposición que contenga en uno o varios lugares la variable x, colocar delante un cuantificador universal implica afirmar que la cuasiproposición dada se cumple cualquiera sea el valor que se le asigne a la variable x. Lo mismo sucederá en el caso de cualquier otra variable, por caso cuando escribimos $(\forall y)yRa$. En general, muy a menudo, los cuantificadores universales iniciales pueden sobrentenderse, de modo que xRa se identificará con $(\forall x)xRa$. Finalmente, si nuestra intención es afirmar que *algunos* individuos x están relacionados con a a través del término de relación R (sobreentendiéndose que lo está *al menos uno*), emplearemos el *cuantificador existencial*, simbolizado "∃" y escribiremos $(\exists x)xRa$.

D. Reglas de deducción. Sabemos que un razonamiento es una suerte de "salto" que parte de ciertas proposiciones, las premisas, para llegar a cierta proposición, la conclusión. Reiteramos que, para que un razonamiento

sea *válido* o *correcto*, se requiere que la forma del mismo sea tal que tenga garantía de "conservación de la verdad", en el sentido de que, si las premisas son verdaderas, la conclusión debe también serlo. Esto *no* significa que las premisas *deban* ser verdaderas: ellas pueden ser verdaderas o falsas. Lo que se exige es la garantía de que, *de ser verdaderas las premisas*, la conclusión ha de ser igualmente verdadera. Un razonamiento correcto se denomina también *deducción*. Y las llamadas *reglas de deducción* de una lógica son las que señalan cuáles, de entre todos los razonamientos que es posible realizar en ella, son correctos o válidos.
La teoría de la deducción de nuestra lógica subyacente, la del sistema SAFO, es algo complicada y no la desarrollaremos aquí en detalle. Pero cuando sea necesario llevar a cabo una deducción, en nuestras consideraciones, estaremos en presencia de casos muy sencillos que serán aclarados convenientemente. Es oportuno tener en cuenta que la teoría de la deducción no se limita a detectar razonamientos correctos, sino que se propone además establecer cuáles son las proposiciones *lógicamente válidas*, también llamadas *verdades lógicas*, aquellas que por su forma deben ser necesariamente verdaderas con independencia de los hechos estudiados y a los que tales proposiciones se refieren. Dichas proposiciones son muy útiles para justificar la corrección de los razonamientos y más adelante nos ocuparemos de ellas.

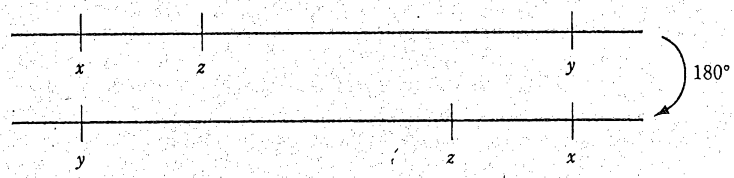
E. Reglas de definición. Éstas permiten introducir nuevos términos por medio de combinaciones de términos ya introducidos previamente. No desarrollaremos la teoría correspondiente, pero en los casos sencillos en que debamos definir algún término indicaremos de qué modo hacerlo.

2. Términos no lógicos o específicos del sistema: primitivos y definidos. Una vez caracterizada la lógica subyacente del sistema axiomático, con sus términos o símbolos lógicos, debemos introducir los términos *específicos*, que son propios del discurso del sistema particular que nos ocupa. Son ellos los términos *primitivos*, que no se definen, y los términos *definidos*, aquellos que se definen según las reglas de definición proporcionadas por la lógica subyacente y que permiten introducir nuevos términos a partir de los que ya se tienen.

A. Términos primitivos. Aunque los admitimos sin definición, debe indicarse su categoría. Cuando se quiera hacer una interpretación del sistema, se elegirán designaciones para estos términos, y ello dependerá del tipo de investigación que se está realizando. Pero en todos los casos tal cosa debe hacerse respetando las categorías que se les han adjudicado a los términos primitivos. Por ejemplo, no podemos interpretar una constante individual o nombre de individuo, que se refiere a individuos, haciéndola corresponder con una relación.

En nuestro sistema SAFO, los términos primitivos serán indicados como *a, b, c, d ... a', b', c', d' ... a", b", c", d"...* (nombres de individuo) con la categoría *constantes individuales*. Tendremos además los términos *x, y, z, w... x', y', z', w'... x", y", z", w"...* con la categoría *variables individuales*, y finalmente R, con la categoría *predicado relacional entre individuos* (o simplemente *término de relación*). Recordamos que, en el sistema SAFO, los términos de relación se corresponderán en las interpretaciones con relaciones binarias o diádicas, pues vinculan a solo dos individuos[2].

B. Términos definidos. Además de términos primitivos podríamos agregar aquí términos definidos; por ejemplo, a partir del término de relación R, definir un término de relación S del siguiente modo: "*a*S*b* si y solo si *b*R*a*", que los lógicos y matemáticos llaman la *conversa* de R. Se lo escribiría, con mayor precisión, $aSb \equiv bRa$. También podríamos definir el término de relación R *entre* así: diremos que "*z* está entre *x* e *y* si y solo si $xRz \wedge zRy$" o bien "*z* está entre *x* e *y* si y solo si $yRz \wedge zRx$"[3]. En una interpretación geométrica en la cual *x, y, z*, etcétera, fuesen puntos de una recta y R la relación *a la izquierda de*, se convertiría en: "un punto *z* está entre los puntos *x* e *y* si *x* está a la izquierda de *z* y *z* está a la izquierda de *y*" o bien "un punto *z* está entre los puntos *x* e *y* si *y* está a la izquierda de *z* y *z* está a la izquierda de *x*".



Las dos figuras ilustran la interpretación mencionada. Dado que la relación *a la izquierda de* se puede aplicar tanto a la recta de la primera figura como a la de la segunda (que resulta de girar la primera en un ángulo de 180º), advertimos que en ambos casos queda definida la relación "entre" en esta interpretación. (El lector interesado puede, como ejercicio, mostrar que dicha relación se obtiene también a partir de la relación

2 El símbolo R se empleará en este libro con un doble significado: por una parte indicará a la relación misma; por otra, al predicado relacional o término de relación. En cada caso, el contexto permitirá discriminar en qué acepción se estará utilizando dicho símbolo.

3 Adviértase que, por razones didácticas, estamos aquí "mezclando" palabras del discurso ordinario con símbolos lógicos.

R *a la derecha de.*) En este caso, hemos definido un término cuya categoría es la de relación, pero no diádica como S sino *triádica*, porque involucra a tres individuos. Pero a los efectos de desarrollar nuestro sencillo sistema axiomático SAFO no vamos a introducir, por el momento, ningún término definido.

3. Morfología del sistema. Como señalamos en el capítulo anterior, una expresión es una combinación cualquiera de términos, pero no todas ellas serán aceptables en nuestro sistema axiomático. Las *reglas morfológicas*, precisamente, son las que nos informan acerca de si una expresión determinada se ha construido correctamente o no. Nos permiten, utilizando los términos lógicos y los términos específicos (primitivos y definidos), construir las cuasiproposiciones del sistema axiomático, es decir, las expresiones *bien formadas*. Las cuasiproposiciones, en este caso, serán por ejemplo las que, tomando los nombres de individuo y el término de relación R, constituyen expresiones del tipo *aRa, aRb, bRa, aRc, cRa,* etc. También admitiremos cuasiproposiciones "abiertas", o sea aquellas que contienen variables individuales, como por ejemplo *x*R*a*, *y*R*a*, *b*R*x*, *x*R*x*, *x*R*y*, y en general todas las combinaciones que se pueden obtener utilizando variables, el término de relación R y otras variables o nombres de individuos. Utilizando conectivas y cuantificadores, podemos escribir cuasiproposiciones tales como la negación de *a*R*a*, es decir, $\sim aRa$, la negación de *b*R*c*, es decir $\sim bRc$, conjunciones del tipo $aRc \wedge bRc$, condicionales como $aRb \supset \sim bRa$, bicondicionales como $aRb \equiv \sim bRa$. Cuando se usan variables hay que admitir también cuasiproposiciones del tipo $(\forall x)xRa$ o bien $(\exists x)xRa$. Como advertimos, tenemos un lenguaje bastante rico porque a su vez estas nuevas cuasiproposiciones con conectivas y cuantificadores podrían volver a combinarse y así sucesivamente.

4. Axiomas. Entre las cuasiproposiciones elegimos arbitrariamente las que adoptaremos como axiomas del sistema SAFO. Ellas serán:

- *Axioma I:* "Para todo *x*, no *x*R*x*", es decir, $(\forall x) \sim xRx$. Los lógicos denominan a esta propiedad de R *arreflexibidad*, lo cual quiere decir que ningún individuo tiene la relación R consigo mismo. Comprobamos esta propiedad en casos concretos (interpretaciones) tales como que ningún número es menor que sí mismo, ningún punto está a la izquierda de sí mismo, ningún instante es anterior a sí mismo, ningún individuo es padre de sí mismo.
- *Axioma II:* "Para todo *x*, para todo *y*, y para todo *z*, si *x*R*y* e *y*R*z*, entonces *x*R*z*", o bien $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(xRy) \wedge (yRz)] \supset xRz$. Esta propiedad de R es la que los lógicos denominan *de transitividad*. Se presenta, por caso, cuando se afirma en una interpretación geométrica que si un segmento es mayor que otro y éste es mayor que un tercero, el primero es mayor que el tercero.

Como indicamos anteriormente, por razones de economía, muchas veces los cuantificadores universales se sobreentienden y no se los escribe. Por ejemplo, el axioma II podría haber sido enunciado así: $[(xRy) \wedge (yRz)] \supset xRz$. No es necesario explicitar que la afirmación involucra a todo x, a todo y y a todo z.

Elegidos estos axiomas, y ante la posibilidad de que existan interpretaciones de SAFO, señalemos lo siguiente: el axioma I nos dice que no encontraremos en *ninguna* interpretación de SAFO casos de individuos que tengan la relación R consigo mismo, mientras que el axioma II afirma que, en *toda* interpretación de SAFO, si dos individuos están vinculados por la relación R, y el segundo, a través de R, lo está con un tercero, entonces R vinculará al primero con el tercero. Expresado abreviadamente, como señalamos, en el sistema SAFO encontramos un término R que alude, en cualquier interpretación, a una relación diádica arreflexiva y a la vez transitiva.

Con las precisiones que hemos indicado, queda constituido nuestro sistema axiomático SAFO. Para evitar confusiones, no debemos pensar por el momento en posibles interpretaciones de este sistema; no hay aquí nada similar a una ordenación en fila de puntos o soldados. Nos hallamos en el terreno de la sintáctica: ni los términos ni las cuasiproposiciones tienen significado alguno. Y nos contentaremos con los axiomas I y II para generar nuestra teoría del orden o sistema axiomático SAFO, si bien, legítimamente, podríamos haber agregado algún otro axioma, cosa que haremos más adelante.

5. Teoremas. Con los elementos que nos han permitido construir nuestro sistema SAFO, estamos en condiciones de deducir *teoremas* de dicho sistema axiomático. Consideramos que los teoremas forman parte del sistema, ya que están implícitos a la hora de deducir consecuencias lógicas a partir de los axiomas. Demostremos entonces un teorema de nuestro sistema SAFO:

Teorema. "Si xRy, entonces no yRx", es decir, $xRy \supset \sim yRx$. Esta propiedad de SAFO se llama de *asimetría*. Nos dice que si la relación es válida en un determinado sentido, no lo puede ser en sentido inverso, o bien, expresado con mayor rigor: si a tiene la relación R con b, entonces b no la podrá tener con a (y ello para todos los individuos). Adviértase que en el enunciado del teorema hemos dado por presupuestos los cuantificadores universales.

Demostración. Se puede demostrar el teorema procediendo por reducción al absurdo, es decir, negarlo y de allí, por deducción, llegar a una conclusión absurda por contradictoria. La negación del teorema implicaría que existen un individuo a y otro b tales que aRb y a la vez bRa, o sea, un par de individuos para los cuales la relación es válida en ambos sentidos. Veamos a continuación cómo proceder.

1) Aplicando el axioma II y haciendo las convenientes sustituciones, obtenemos lo siguiente: "si aRb y bRa entonces aRa", es decir, $[aRb \wedge bRa] \supset aRa$.

2) Ahora podemos aplicar una conocida regla de deducción de la lógica proposicional llamada tradicionalmente *modus ponens*, que tiene dos premisas y una conclusión. Si p y q son las dos premisas del razonamiento, la forma de dicha regla es la siguiente:

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

La primera premisa es un condicional, "si ... entonces", donde p y q son los llamados, respectivamente, *antecedente* y *consecuente* de aquél. Lo que nos dice el *modus ponens* es que afirmar el condicional y a la vez su antecedente lleva a la conclusión de que podemos afirmar el consecuente. Por ejemplo, si se afirma a la vez "si Pedro estudia entonces aprobará el examen" y "Pedro estudia", se concluye "Pedro aprobará el examen". Aplicado a nuestro caso, tendremos lo siguiente: la primera premisa es "si aRb y bRa entonces aRa", o sea, $[(aRb) \wedge (bRa)] \supset aRa$, y la segunda "$aRb$ y bRa", o sea, $aRb \wedge bRa$; entonces la conclusión será "aRa". Pero esta conclusión es absurda porque se contradice con lo que exige el axioma I: ningún individuo puede tener la relación consigo mismo. El absurdo proviene de haber supuesto la negación del teorema, y por tanto tendremos que aceptarlo: "si xRy, entonces no yRx", o sea, $xRy \supset \sim yRx$. Con lo cual nuestro teorema ha quedado demostrado.

El lector advertirá que hemos demostrado una propiedad dentro del sistema SAFO, expresada por el teorema, sin saber *qué son* los individuos ni *cuál es* la relación R. La demostración ha sido puramente formal, y del mismo modo se obtendrán los restantes teoremas del sistema, todos los cuales carecen de significados.

¿Tiene SAFO modelos?

Nos preguntaremos ahora a propósito de SAFO si éste admite interpretaciones y, de haberlas, cuáles de ellas son adecuadas y cuáles no, es decir, cuáles son modelos y cuáles no lo son.

Ejemplo 1. Hagamos en primer lugar una interpretación *aritmética* de SAFO, para lo cual tendremos que establecer cómo será el diccionario. En la columna de la izquierda aparecen nombres de individuo tales como *a, b, c,* etcétera, y

también variables tales como *x, y, z,* etcétera, mientras que en la columna de la derecha tendremos expresiones que aluden a números naturales. Los nombres de individuo, en la interpretación, se corresponden con determinados números naturales; las variables, por su parte, también admitirán números naturales como valores posibles a serles asignados. En cuanto al término de relación R, también a la izquierda en el diccionario, queda interpretado a la derecha como indicando la relación *menor que.* Aceptado lo anterior, todas las cuasiproposiciones de SAFO quedan convertidas en auténticas proposiciones, que pueden, por tanto, ser verdaderas o falsas. Así, por ejemplo, si *a* se interpreta por 1 y *b* se interpreta por 2, *aRb* queda interpretada por la proposición verdadera "1 es menor que 2", mientras que *bRa* quedará interpretada por la proposición falsa "2 es menor que 1". Lo mismo sucederá con las otras cuasiproposiciones. Hemos ingresado ahora en el terreno de la verdad y la falsedad en la aritmética de los números naturales que empleamos usualmente.

Ahora bien, esta interpretación aritmética de SAFO, ¿es un modelo? Comencemos por decidir si el axioma I se cumple, es decir, si es verdadero[4]. Ciertamente lo es, porque es verdad que, para todo número natural *x*, *x* no es menor que *x*. También lo es el axioma II de transitividad porque, para toda terna de números naturales *x, y, z,* si *x* es menor que *y*, e *y* es menor que *z*, entonces *x* es menor que *z*. Por consiguiente, esta interpretación de SAFO es una interpretación adecuada, y hemos hallado un ejemplo de modelo de nuestro sistema axiomático. Y como ya hemos señalado, todo lo que pueda deducirse a partir de los axiomas I y II, en esta interpretación que hace verdaderos a los axiomas, tendrá que ser también verdadero. Los teoremas de este sistema interpretado serán proposiciones verdaderas, y en particular lo será el teorema que hemos demostrado y que en esta interpretación se enunciaría: "si un número natural es menor que otro, entonces el segundo no es menor que el primero". En símbolos: $x<y \supset \sim(y<x)$, donde a las variables se les asignan como valores números naturales. Adviértase que también aquí, como en casos anteriores, hemos dado por sobreentendidos los cuantificadores universales, ya que, en rigor, deberíamos haber escrito $(\forall x)(\forall y)[x<y \supset \sim(y<x)]$.

Ejemplo 2. En una segunda interpretación de SAFO, los nombres de individuo *a, b, c,* etcétera, y las variables *x, y, z,* etcétera, aluden a seres humanos, y

4 Adviértase que aquí "axioma I" se refiere a la proposición en la que se ha convertido, en la interpretación, el axioma I del sistema axiomático (una cuasiproposición) y por lo tanto tiene sentido preguntarse si dicha proposición es verdadera o falsa. Ya señalamos que, cuando en una interpretación un axioma se convierte en una proposición verdadera, se dice que el axioma "se cumple". Aunque poco rigurosa, esta expresión es habitual y la emplearemos con frecuencia. Análogamente, decir que un axioma "no se cumple" significa que en la interpretación se convierte en una proposición falsa. Sin embargo, en el caso de que un sistema axiomático tenga una interpretación sobre otro, un axioma "se cumple" si es teorema en la interpretación, tal como lo hemos señalado en el capítulo anterior.

el término de relación R se interpreta en el diccionario como *hijo* de. Ahora el axioma I se convertirá en la proposición "para todo ser humano *x*, *x* no es hijo de sí mismo", lo cual, desde el punto de vista de la biología, es verdadero. A su vez, el axioma II se interpretará diciendo que "para todo ser humano *x*, para todo ser humano *y*, y para todo ser humano *z*, si *x* es hijo de *y* e *y* es hijo de *z*, entonces *x* es hijo de *z*", proposición que según la biología es falsa, pues si *x* es hijo de *y* e *y* es hijo de *z*, *x* será nieto de *z*, pero no hijo de *z*. (Salvo en ciertos casos de incesto... que no consideramos aquí.) Por consiguiente, sólo uno de los dos axiomas es verdadero, y esta interpretación *biológica* no nos proporciona un modelo de SAFO. Adviértase que, en este caso, el conocimiento de que la interpretación no es un modelo procede de nuestro conocimiento biológico.

Ejemplo 3. Analicemos en este ejemplo una interpretación *geométrica* de SAFO. Ahora *a, b, c,* etcétera, y las variables *x, y, z,* etcétera, aluden a puntos de una recta, y el término de relación R se interpreta como *a la izquierda de.* Los axiomas I y II se convierten en proposiciones verdaderas, porque ningún punto está a la izquierda de sí mismo, y además, si un punto está a la izquierda de otro, y éste está a la izquierda de un tercero, el primero está a la izquierda del tercero. Esta tercera interpretación, por tanto, es un modelo de SAFO dentro de la geometría euclídea.

Ejemplo 4. La cuarta interpretación de SAFO, que también será *biológica,* nos dice que *a, b, c,* etcétera, y las variables *x, y, z,* etcétera, se entenderán como en el segundo ejemplo aludiendo a seres humanos, pero el término de relación R ya no será *hijo de,* sino *ancestro de.* El axioma I se convierte en una proposición verdadera, porque nadie es un ancestro de sí mismo, y lo mismo ocurre con el axioma II, porque es verdad que si *x* es ancestro de *y* e *y* es ancestro de *z*, entonces *x* es ancestro de *z*. Tenemos entonces un nuevo modelo de SAFO, lo cual podemos garantizar nuevamente con el recurso a la biología.

Ejemplo 5. En una quinta interpretación que sólo diferiría de la anterior en que R se corresponde con *hermano de,* ocurre que nadie es hermano de sí mismo y por tanto el axioma I se cumple, o sea, se convierte en una proposición verdadera. Pero, ¿qué sucede con el axioma II? En principio podríamos pensar que con él ocurre lo mismo, porque si *x* es hermano de *y* e *y* es hermano de *z*, entonces *x* es hermano de *z*. Pero podría darse el siguiente caso particular: *a* es hermano de *b, b* es hermano de *a*, por consiguiente *a* es hermano de *a*, es decir, de sí mismo, lo cual no está admitido en esta interpretación. Por consiguiente esta cuarta interpretación de SAFO, igualmente *biológica*, no es un modelo del mismo.

Ejemplo 6. Consideremos ahora una interpretación *física* de SAFO. Si *a, b, c,* etcétera, y las variables *x, y, z,* etcétera, aluden a instantes en el tiempo, y R

a *anterior en el tiempo a*, ambos axiomas se convierten en proposiciones verdaderas y por tanto estamos en presencia de un modelo de SAFO, lo cual queda garantizado por la física.

Ejemplo 7. Para mostrar la variedad de modelos que puede tener SAFO consideremos un último ejemplo: *a, b, c,* etcétera, y las variables *x, y, z,* etcétera, aluden a militares, y al término R lo hacemos corresponder con *menor jerarquía que*. Estamos aquí ante un nuevo modelo, porque cualquiera sea el militar que consideremos, éste no tiene menor jerarquía que él mismo, y además si un militar tiene menor jerarquía que otro, y éste tiene menor jerarquía que un tercero, entonces el primero tiene menor jerarquía que el tercero. Ambos axiomas se cumplen: se han convertido en proposiciones verdaderas. Pero este modelo no corresponde a ninguna ciencia como la matemática, la física o la biología, sino que más bien se refiere a una reglamentación; por ello podríamos llamarlo "modelo castrense" de SAFO.

Advirtamos que los modelos de SAFO correspondientes a 1 y 3 pertenecen a la matemática. El primero es un modelo aritmético, y el tercero es un modelo geométrico, de modo que podríamos considerarlos como "domésticos" pues no estamos abandonando el campo de la disciplina. En cambio, los otros ejemplos no se refieren a la matemática sino a las ciencias naturales, como la biología o la física: no son interpretaciones "domésticas". Claro que, al hacer estas ejemplificaciones damos por sentado que el biólogo o el físico no están trabajando con suposiciones o hipótesis sino que puede garantizar concluyentemente la verdad de las proposiciones que resultan de los axiomas, lo cual no es cierto. Más adelante volveremos sobre este punto, que atañe a los modelos de un sistema formal en el ámbito de las ciencias naturales y sociales, en las que las proposiciones son hipotéticas y con frecuencia no es posible garantizar la verdad de las mismas.

En todos los ejemplos anteriores hemos respetado, como corresponde, la prescripción de que en toda interpretación es necesario asignar las mismas categorías que previamente se asignaron a los términos primitivos en el sistema dado. Puesto que la categoría del término de relación R es "relación diádica" o "binaria", todos nuestros diccionarios han dado significación a R respetando ese carácter de R. Por otra parte, hemos comprobado que, dada la variedad de diccionarios que podemos adoptar, un sistema axiomático no tiene una única interpretación posible, y también que sólo algunas de tales interpretaciones serán modelos. Nuestra segunda interpretación de SAFO, por caso, no resultó ser un modelo del mismo. Los ejemplos confirman finalmente que la variedad de modelos diferentes de un sistema axiomático abre un abanico de posibilidades para muchos campos del conocimiento, porque en ellos los teoremas, obtenidos ya por deducción a partir de los axiomas, serán proposiciones verdaderas.

Ampliando el sistema SAFO: el sistema SAFOT

Agregaremos ahora un tercer axioma a los dos anteriores, con lo cual, como es obvio, tendremos un nuevo sistema axiomático. Dicho axioma, al que llamaremos axioma III, es el siguiente: "Si x es distinto de y, entonces xRy *o bien* yRx" (donde "o bien" corresponde a la disyunción excluyente), el cual, en lenguaje simbólico riguroso, se expresaría como $x \neq y \supset (xRy \vee yRx)$. Nuevamente damos por sobreentendidos los cuantificadores universales. En este caso, el sistema que estamos construyendo será llamado no simplemente de *orden* sino de *orden total*. ¿Qué significa el nuevo axioma? Que dados dos individuos distintos, *o bien* el primero se relaciona a través de R con el segundo *o bien* el segundo se relaciona con el primero a través de R. Lo que no se permite (dado que la disyunción es excluyente) es que el primero se relacione a través de R con el segundo y *a la vez* el segundo se relacione con el primero a través de R, y a la inversa. El sistema axiomático formal que resulta de adoptar los axiomas I, II y III ya no es SAFO (pues éste sólo tiene dos axiomas) sino un sistema al que llamaremos SAFOT, iniciales de "sistema axiomático formal del orden total".

Una pregunta pertinente sería la siguiente: ¿no será el axioma III, en realidad, un teorema del sistema SAFO? Ello bien podría suceder, pero en este momento no estamos en condiciones de responder la pregunta. Sin embargo, ella es muy interesante porque plantea un significativo problema del método axiomático. Si el axioma III fuese un teorema en el sistema SAFO, la única manera de comprobarlo sería ofreciendo una demostración, pero ¿qué sucede si al cabo de una serie de deducciones en SAFO el teorema no aparece? ¿No aparece porque no es un teorema de SAFO o porque aún no hemos realizado suficientes deducciones? Por consiguiente, nos vemos ante la necesidad de formularnos una nueva pregunta: ¿cómo puede un matemático saber si el axioma III es realmente un axioma independiente de los axiomas I y II en el sistema SAFOT, lo cual significa que ni él, ni su negación, pueden ser obtenidos a partir de dicho par de axiomas?

Posponiendo para más adelante la consideración de la pregunta anterior, admitamos sin justificación que el axioma III no es redundante en SAFOT, es decir, que no se lo puede obtener a partir de los axiomas I y II (ni tampoco se puede obtener su negación), y veamos qué sucede en cuanto a sus posibles modelos. En ciertas interpretaciones, los axiomas I y II nos llevarán a proposiciones verdaderas, pero no ocurrirá lo mismo con el axioma III. Recordemos nuestra interpretación "castrense" de SAFO, en la cual *a, b, c,* etcétera, al igual que *x, y, z,* etcétera, aludían a militares, y el término de relación R se correspondía con *menor jerarquía que.* Era un modelo de SAFO porque es verdadero que ningún militar tiene menor jerarquía que la que le corresponde a él mismo, pero también lo es el que, si alguien tiene menor jerarquía que otro y éste tiene menor jerarquía que un tercero, el primero tiene menor jerarquía que el terce-

ro. Pero ¿qué sucede con el axioma III? No es verdad que, dado un militar *a* y otro militar distinto *b*, *a* tenga que tener menor jerarquía que *b* o bien *b* tener menor jerarquía que *a*, pues podrían tener ambos la misma jerarquía. La interpretación castrense, que era un modelo de SAFO, no lo es de SAFOT. Se puede verificar, sin la mayor dificultad, que las interpretaciones aritmética y geométrica de SAFO que hemos ofrecido anteriormente sí son modelos de SAFOT. Dados dos números no idénticos, el primero es menor que el segundo o bien el segundo es menor que el primero; dados dos puntos distintos de una recta, uno de ellos está a la izquierda del otro o bien el segundo está a la izquierda del primero. También puede comprobar el lector que la interpretación de los ancestros, modelo de SAFO, no lo es de SAFOT: dados dos individuos diferentes, es falso que necesariamente el primero sea ancestro del segundo o bien que el segundo sea ancestro del primero.

Debemos ahora caracterizar algunas de las propiedades más importantes de los sistemas axiomáticos y ciertos requerimientos que se les exigen. Lo haremos, en particular, empleando como referencia a los sistemas SAFO y SAFOT que acabamos de describir. Tendremos entonces la oportunidad de estudiar en detalle las características y condiciones que han de cumplir tales sistemas, de las que dependen, precisamente, el valor y la posibilidad de operar con ellos.

8

Propiedades generales y requisitos de los sistemas axiomáticos

Las propiedades sintácticas de los sistemas axiomáticos

Debemos ahora caracterizar las propiedades más relevantes de los sistemas axiomáticos y algunos de los requisitos que cumplen, haciendo la salvedad de que existen otras propiedades y otros requisitos que aquí no serán mencionados. Señalemos además que no todas las propiedades que enunciaremos serán empleadas en este libro, pero que hemos decidido incluir también algunas que podrán ser de utilidad para el lector interesado en proseguir con el estudio de estos temas. También debemos aclarar que la nomenclatura que emplean distintos autores puede no coincidir con la nuestra. Las primeras propiedades que vamos a considerar, las *propiedades sintácticas*, son aquéllas que encontramos en el sistema axiomático independientemente de la interpretación que luego queramos darle. Dicho de otro modo, son propiedades que atañen a su carácter de ejemplo particular de sistema sintáctico, no interpretado.

Consistencia

Comencemos con la propiedad de *consistencia*, llamada a veces de *coherencia*, a la que haremos numerosas referencias en capítulos posteriores. Se dice que un sistema axiomático es consistente si no puede haber en él un teorema tal que su *negación* también sea teorema. Dicho de otro modo, no encontraremos en el sistema dos teoremas contradictorios. En la analogía con el ajedrez, llegar a una contradicción sería para el matemático algo así como hallarse en posición de jaque mate. ¿Por qué se estatuye este requisito de consistencia, es decir, por qué esta propiedad, de no cumplirse, debe entenderse como un defecto de un sistema axiomático? Porque si se confía en que éste podrá tener modelos, la no consistencia o inconsistencia del sistema bloquea esta posibilidad. En efecto, en los modelos, las proposiciones que resultan de los teoremas tienen que ser verdaderas; pero por mera lógica sabemos que, si p es verdadera, $\sim p$ será falsa, y a la inversa. Inevitablemente, el sistema interpretado tendrá un teorema falso. Por consiguiente, la inconsistencia impide que el sistema axiomático en cuestión admita aplicaciones, lo cual es realmente grave. Un astrónomo

que afirmara "El Sol es una estrella" y a la vez "El Sol no es una estrella", es decir, la conjunción "El Sol es una estrella *y* el Sol no es una estrella" sería tildado de psicótico. Se comprende por qué a un matemático le importa trabajar con sistemas axiomáticos que sean consistentes.

¿Será consistente nuestro sistema SAFO? Por el momento daremos una contestación afirmativa a la pregunta: efectivamente lo es, es decir, no contiene teoremas contradictorios. Pero esta respuesta tendrá que ser justificada, asunto que pospondremos por el momento.

Completitud

La segunda propiedad que puede tener un sistema axiomático es denominada *completitud sintáctica*. Ello implica que el sistema tiene una capacidad especial de resolver la siguiente cuestión: dada una cuasiproposición del sistema, el desarrollo de éste permite demostrarla o bien demostrar su negación. Dicho de otra manera, habrá algún modo de llegar a un teorema expresado por dicha cuasiproposición o en su defecto a un teorema expresado por la negación de la misma. No estamos en condiciones de poder dirimir la pregunta acerca de si nuestro sistema SAFO es completo o no lo es, lo cual haremos más adelante.

Saturación

Se dice que un sistema axiomático es (o está) *saturado* si no existe la posibilidad de ampliarlo con un nuevo axioma que no sea teorema del sistema dado ni tampoco lo sea su negación. Esto implica que, a la inversa, un sistema *no está saturado* si encontramos una cuasiproposición que no es teorema del sistema, ni tampoco lo es su negación, lo cual, en principio, nos permitiría agregarlo al sistema como nuevo axioma: así obtendríamos un nuevo sistema que resulta de la *ampliación* del anterior. El lector debe recordar aquí lo que decíamos a propósito de nuestro sistema SAFO, para cuya construcción admitíamos sólo dos axiomas, I y II. El sistema SAFOT resultaba de la ampliación de SAFO por el agregado del axioma III. Este último, llamado de *comparabilidad* o de *orden total*, no se obtiene como teorema en el sistema SAFO, ni tampoco se obtiene su negación, por lo cual es posible ampliar el sistema sin que se produzca inconsistencia o redundancia: SAFO no está saturado. Aquí el lector podrá preguntarse cómo podemos llegar a saberlo. Pronto hemos de satisfacer esta inquietud, pues existen procedimientos para contestar tales interrogantes.

Independencia

A propósito de la saturación de un sistema axiomático surge aquí un problema muy importante. Si un sistema está saturado y pretendemos agregarle un nuevo axioma que es en realidad un teorema del aquél, o bien lo es su nega-

ción, no lograremos ampliarlo, en el sentido de que su inclusión sería redundante o bien contradictoria. Adviértase que si la negación del nuevo axioma es teorema, el axioma provocaría inconsistencia porque el sistema incluiría tanto el nuevo axioma como su negación, que ya era teorema. Por lo cual es importante saber, a propósito de la saturación, si hay cuasiproposiciones tales que ni ella ni su negación son teoremas, en cuyo caso no habrá saturación y el sistema podrá ser ampliado. De una cuasiproposición se dice que es *independiente de los axiomas* si ella no es teorema del sistema ni lo es su negación. Es ese caso, también suele afirmarse sencillamente que la cuasiproposición es *independiente del sistema*. Esta noción supone un problema: quizás el desarrollo del sistema axiomático no permita, para cada cuasiproposición, resolver en principio la cuestión de si ella admite una demostración o la admite su negación a partir de los axiomas, o establecer que no sucede ninguna de las dos posibilidades anteriores. Hemos encontrado ya el problema de la independencia cuando consideramos el surgimiento y desarrollo de las geometrías no euclideanas. La geometría euclídea supone aceptar que el sistema constituido por los axiomas 1, 2, 3 y 4 de Euclides se puede ampliar, sin producir inconsistencia, con el agregado del quinto axioma; las geometrías no euclideanas, que se construyen agregando a 1, 2, 3 y 4 la *negación* del axioma 5 de Euclides, supone, a su vez, otra ampliación que tampoco produce inconsistencia[1]. De ser así, ello indicaría que el axioma de las paralelas es *independiente* de los restantes cuatro axiomas de la geometría clásica de Euclides.

En general, si encontramos una cuasiproposición independiente de los axiomas de un sistema axiomático, o sea, si descubrimos que el sistema no está saturado, podemos ampliarlo, produciendo una suerte de bifurcación: en una dirección, la que se obtiene con el sistema dado agregándole dicha cuasiproposición, y en otra, la que se obtiene agregándole la negación de la misma. Y un problema que se presenta siempre, cuando se investiga un sistema axiomático, es si una bifurcación de tal naturaleza es posible, y que consiste por tanto en decidir si el sistema dado está saturado o no.

¿Está saturado el sistema SAFO que introducimos anteriormente? Para responder la pregunta habría que saber si existe una cuasiproposición que no es teorema en SAFO y que tampoco lo es su negación. Efectivamente, luego mostraremos que aquella tercera cuasiproposición, que permite construir el sistema axiomático del orden total SAFOT, no puede ser obtenida como teorema en el sistema SAFO, pero su negación tampoco. El axioma III es una cuasiproposición independiente de los dos axiomas, I y II, constitutivos de SAFO. La bifurcación, por tanto, es posible.

1 Debemos aclarar que lo único que estamos afirmando es que *estas ampliaciones* no producirán inconsistencia, lo cual no significa haber probado que los sistemas a los que hacemos referencia son consistentes. Esta última cuestión será abordada en próximos capítulos.

Suele afirmarse a veces que en un sistema axiomático es conveniente que cada uno de los axiomas sea independiente de los demás; dicho de otra manera, que ninguno de ellos, ni su negación, pueda ser demostrado como teorema en el sistema conformado únicamente por los restantes axiomas. Y se dice también que un sistema axiomático tiene la propiedad de independencia si cada uno de los axiomas es independiente de los restantes, lo cual no siempre es fácil de establecer. A este requisito lo podríamos llamar "estético" o "de elegancia", porque si existe un axioma que no es independiente de los demás, y suponiendo que su negación no es teorema (en cuyo caso el axioma dado *es* teorema), su inclusión en el sistema en calidad de nuevo axioma, aunque nada lo impide desde el punto de vista lógico, sería redundante. ¿Para qué se lo incluye si ya lo hemos obtenido (o lo obtendremos) como teorema? El requisito de independencia remite a la economía del pensamiento, según la famosa sentencia o "navaja" de Guillermo de Ockham, el filósofo del siglo XIV: "Las entidades no deben ser multiplicadas sin necesidad". Cabe señalar, sin embargo, que por razones didácticas a veces se acepta en un sistema la presencia de axiomas redundantes, tal vez por aquello de que "lo que abunda no daña" y que en algunos casos facilita la tarea del investigador o del estudiante.

Vale la pena destacar, por último, que afirmar de un sistema axiomático que es *sintácticamente completo* o bien que *está saturado*, es exactamente lo mismo. ¿Por qué? Porque, por definición de completitud, dada una cuasiproposición cualquiera del sistema, ella tendrá que ser teorema o su negación tendrá que serlo, y por consiguiente el sistema estará saturado. A la inversa, si el sistema está saturado y por tanto no se lo puede ampliar con ninguna cuasiproposición, entonces toda cuasiproposición del sistema se podrá deducir de los axiomas, o bien se podrá deducir su negación; por tanto, el sistema será completo.

Decidibilidad sintáctica

Decimos que un sistema axiomático es *sintácticamente decidible* si existe un método tal que, para toda cuasiproposición del sistema, permite poner en evidencia si ella es teorema o no en el sistema. El método tiene que ser *efectivo*, lo cual significa que debe permitir resolver el problema en un número finito de pasos, del mismo modo en que, para emplear un símil, se emplea el método para hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de ciertos números naturales dados. Desgraciadamente, muchos sistemas axiomáticos importantes no son sintácticamente decidibles: para ellos, tal método no existe.

Las propiedades semánticas de los sistemas axiomáticos

Además de las propiedades sintácticas de los sistemas axiomáticos debemos considerar ahora sus propiedades semánticas, es decir, las que atañen al significado que podríamos dar a los términos específicos. Estamos aquí en la órbita de las interpretaciones, como las que ofrecimos a propósito de nuestro sistema SAFO, y por tanto en la de la matemática aplicada.

Satisfactibilidad

Esta propiedad semántica expresa sencillamente el hecho de que el sistema tenga modelos: un sistema es *satisfactible* si posee al menos uno. El requisito es importante para que sean posibles las aplicaciones de la matemática y por consiguiente para que podamos desarrollar la matemática aplicada. Desde luego, un sistema axiomático puede tener diversas interpretaciones, pero muchas de ellas serán absurdas, como aquella que propusimos de la geometría de Euclides interpretando "punto" por "conejo", "recta" por "zanahoria", etcétera. No interesan esas interpretaciones, pues no son modelos.

Categoricidad semántica o por isomorfismo

Decimos que dos modelos de un *mismo* sistema axiomático son *isomórficos* cuando hay entre ellos al menos una relación que cumple dos condiciones: (a) cada individuo del primer modelo se corresponde con uno y solo uno del segundo, y viceversa; (b) las propiedades y relaciones del primero quedan representadas por propiedades y relaciones del segundo, y viceversa, de manera tal que si en el primero dos individuos están vinculados por una relación R, los correspondientes en el segundo se vincularán por la relación que corresponde a R. Es decir:

- El individuo representado por *a* en el primer modelo se corresponde con el individuo representado por *a* en el segundo modelo;
- El individuo representado por *b* en el primer modelo se corresponde con el individuo representado por *b* en el segundo modelo;
- El individuo representado por *c* en el primer modelo se corresponde con el individuo representado por *c* en el segundo modelo;

y así sucesivamente. Además:

- La relación representada por R en el primer modelo se corresponde con la relación representada por R en el segundo modelo.

Y en estas condiciones el isomorfismo supone:

- *aRb* se cumple en el primer modelo si y solo si *aRb* se cumple en el segundo modelo.

Un sistema es *categórico* si todos sus modelos son isomórficos. En nuestro ejemplo de sistema axiomático, SAFO, ello no ocurre. Una fila de 10 soldados, donde los soldados interpretan a los individuos, y la relación R *detrás de*, es un modelo de este sistema axiomático; pero una fila de 100 soldados también lo es. La condición de isomorfismo no se cumple, porque no es posible representar isomórficamente un sistema de 10 elementos en otro que tiene 100 elementos. (En el segundo, tendríamos 90 elementos sin correspondencia con elementos del primero.) Por consiguiente la teoría del orden, el sistema axiomático SAFO, no tiene la propiedad de categoricidad.

Más adelante analizaremos ejemplos de sistemas axiomáticos que son categóricos. Por caso, el sistema axiomático con el que se pretende fundamentar los números naturales, si se emplea para construirlo una lógica subyacente suficientemente poderosa, posee categoricidad, pues todas las interpretaciones que constituyen modelos de la aritmética de los números naturales tendrán que ser isomórficos.

Completitud semántica

Los axiomas de un sistema, convertidos en proposiciones verdaderas en todos sus modelos, darán lugar a que los teoremas, *en todos esos modelos*, se habrán convertido también en proposiciones verdaderas. ¿Ello es válido a la inversa? ¿Lo que es verdadero en todos los modelos tendrá que provenir de teoremas en el sistema axiomático considerado? La respuesta puede ser afirmativa o negativa. En el caso del sistema axiomático SAFO, quizás exista algún tipo de propiedad que se cumpla en todos sus modelos y que sin embargo el sistema no permita demostrarla como teorema. No afirmamos que éste sea el caso, pero la consideración anterior nos permite definir lo siguiente: un sistema axiomático es *semánticamente completo con relación a todos sus modelos* si toda cuasiproposición que se cumple en todos sus modelos puede ser demostrada en el sistema como teorema. También puede ser útil la siguiente característica de un sistema: éste es *semánticamente completo con relación a un dado modelo* si toda propiedad que se cumple en el modelo puede ser demostrada en el sistema como teorema.

Consistencia y satisfactibilidad

Hay una relación muy importante entre consistencia y satisfactibilidad, que nos ha obligado a prestar particular atención a estas propiedades. Si un sistema tiene al menos un modelo, es decir, es satisfactible, necesariamente debe ser

consistente. Éste es un resultado que inmediatamente advirtió Hilbert en su momento y que ofrece un método, aunque no sea el único posible, para probar la consistencia de un sistema axiomático. Supongamos que un sistema axiomático fuese satisfactible pero no consistente; ello significa que tendría al menos un modelo y que, a la vez, en el sistema hay un teorema cuya negación es también teorema. En ese modelo, todos los teoremas tienen que ser verdaderos, pero resultaría entonces que: (a) el teorema en cuestión debería transformarse en una proposición verdadera; y (b) su negación también, lo cual es contradictorio. Por el principio lógico de no contradicción, no es posible que una proposición sea a la vez verdadera y falsa. Este absurdo proviene de haber supuesto que un sistema satisfactible pueda ser inconsistente. Por lo tanto, si un sistema tiene al menos un modelo, debe ser consistente. Esto permite contestar de manera rigurosa una pregunta que nos formulamos respecto del sistema del orden SAFO: ¿es consistente o no? La respuesta es afirmativa, porque hemos mostrado que tiene modelos, tales como el aritmético, el geométrico, el físico y el castrense o reglamentarista. Por consiguiente ahora podemos afirmar con seguridad que SAFO es un sistema consistente[2].

Es interesante preguntarse también si el sistema del orden SAFO, además de ser satisfactible, está saturado, o sea, si se lo puede ampliar o no agregándole cuasiproposiciones que sean independientes de los axiomas I y II del sistema. Recordemos que una cuasiproposición es independiente de los axiomas (o del sistema) si ella no es teorema del sistema ni lo es su negación, es decir, ni ella ni su negación pueden ser deducidas a partir de los axiomas. Los axiomas de SAFO son I y II, y entonces nos preguntamos en primer lugar si el axioma III, que quisiéramos agregar a SAFO para construir SAFOT, puede o no ser demostrado a partir de ellos. Suponiendo que lo fuera, toda vez que interpretemos dichos dos axiomas de tal modo que se conviertan en proposiciones verdaderas, el axioma III también se habrá convertido en proposición verdadera, pues la deducción conserva la verdad. En cambio, si el axioma III se convirtiera en una proposición falsa, ello mostraría que III no es demostrable a partir de I y II. Puesto que entonces sería verdadera la *negación* de III, hemos hallado un procedimiento para garantizar que el axioma III no es demostrable a partir de los dos anteriores: bastará mostrar que el sistema axiomático formado por I, II y la *negación* de III tiene *al menos un modelo*, es decir, es satisfactible. Por otra parte, la independencia del axioma III exige además que la negación de éste no sea demostrable a partir de I y II, cuestión que podemos dilucidar empleando el mismo procedimiento. Puesto que la *negación* de la *negación* de III es sencillamente III, bastará con encontrar al menos un modelo del sistema axiomático cuyos axiomas sean I, II y III (el sistema SAFOT, precisamente).

2 Debemos advertir que esta afirmación debe ser matizada y será aclarada más adelante con la noción de *consistencia relativa*.

Probaremos entonces, rigurosamente, que el axioma III es independiente de los axiomas I y II de SAFO, de lo cual resultará que SAFO no está saturado. En páginas anteriores hemos mostrado que SAFOT, sistema formado por los axiomas I, II y III, tiene modelos, como el aritmético y el geométrico. Por otra parte, en la interpretación castrense, los axiomas I y II se convertían en proposiciones verdaderas, pero no ocurría lo mismo con el axioma III, que se convertía en "dado un militar *a* y otro militar *b*, *a* tiene menor jerarquía que *b* o bien *b* tiene menor jerarquía que *a*", lo cual es falso pues podrían tener ambos la misma jerarquía. El axioma III conducía a una proposición falsa, cuya *negación*, por tanto, es verdadera. Dicho de otro modo, los axiomas I y II y la negación de III se convierten en proposiciones verdaderas, de lo cual resulta la independencia del axioma III respecto de I y II, y se puede garantizar que SAFO no está saturado.

A modo de ejercicio, mostraremos que es posible hallar otro modelo del sistema SAFO en el que se cumplen I, II y la negación de III empleando una interpretación no considerada hasta este momento, a la que llamaremos *conjuntística*. En este ejemplo, *a*, *b*, *c*, etcétera, corresponden a conjuntos de elementos, y las variables *x*, y, *z*, etcétera, también admiten como valores a conjuntos. El término de relación R se interpreta como la relación *propiamente incluido en*. Diremos que un conjunto está propiamente incluido en otro si todos los elementos del primero pertenecen también al segundo, pero no recíprocamente, es decir que existen elementos del segundo que no pertenecen al primero. Esta condición impide que los conjuntos sean idénticos[3]. Tal podría ser el caso, en un ejemplo concreto, de dos conjuntos formados respectivamente por los elementos 1, 2 y 3 y por los elementos 1, 2, 3, 4, y 5: el primero está propiamente incluido en el segundo. El axioma I se hace verdadero porque ningún conjunto esta propiamente incluido en sí mismo; por otra parte, con el axioma II ocurre lo mismo, porque la noción de inclusión propia es transitiva: si a esta propiamente incluido en *b* y *b* está propiamente incluido en *c*, entonces *a* está propiamente incluido en *c*. La interpretación conjuntística de SAFO es por tanto un modelo del mismo. Pero el axioma III se convierte en "dados dos conjuntos distintos, el primero está propiamente incluido en el segundo o *bien* el segundo está propiamente incluido en el primero", lo cual es una proposición falsa pues podría ocurrir que no tuviesen ningún elemento en común. Su negación será verdadera, y por consiguiente esta interpretación conjuntística será modelo del sistema cuyos axiomas son I, II y la negación de III. Comprobamos nuevamente que SAFO *no* es completo y que por tanto no está saturado.

3 La inclusión *propia* de un conjunto en otro se distingue de la inclusión *impropia* en que, en este último caso, debe cumplirse que todos los elementos del segundo conjunto pertenezcan también al primero: ambos conjuntos son idénticos, pues constan de los mismos elementos. Este tema será abordado con mayor detalle cuando analicemos la teoría de conjuntos, en el Capítulo 10.

El método anterior, que nos permite probar que una cuasiproposición no es teorema en un sistema axiomático dado, y que tampoco lo es su negación, es completamente general. En particular nos muestra que, por ser la cuasiproposición independiente de los axiomas, puede ser incorporada como axioma ampliatorio del sistema. Si se encuentra un modelo en que los axiomas del sistema se cumplan, es decir, se conviertan en proposiciones verdaderas, pero la cuasiproposición que se halla en discusión no se cumple, ella no será un teorema del sistema. En este punto, podemos ya advertir la trascendencia de la noción de *modelo* como instrumento esencial para el análisis de los sistemas axiomáticos, y especialmente para el análisis de la posibilidad de ampliarlos. Recordemos, por otra parte, la importancia de los modelos para construir la matemática aplicada.

Decidibilidad semántica

Es el correlato de la decidibilidad sintáctica, pero ahora en el ámbito de las interpretaciones. Un sistema axiomático es *semánticamente decidible* con relación a un determinado modelo del sistema si existe un método para poner en evidencia, para toda proposición verdadera en tal modelo, si ella es deducible o no en el sistema dado. Dicho método debe ser *efectivo* en el sentido ya indicado de que toda aplicación del mismo consta de un número finito de pasos.

La importancia filosófica de las propiedades de los sistemas axiomáticos

¿Por qué se admite que un sistema axiomático que posee las propiedades que hemos señalado, o al menos algunas de ellas, aventaja a aquéllos que no las tienen? Consideremos en primer lugar la propiedad de consistencia. Hay dos razones para exigirla. En primer lugar, si un sistema axiomático es inconsistente habrá en el mismo un teorema t tal que su negación, $\sim t$, también es teorema. Pero la lógica nos dice que si se toman como premisas una proposición y la negación de la misma, se concluye de ellas *cualquier* proposición. De ser así, resultaría que en un sistema inconsistente se podría deducir toda cuasiproposición imaginable como teorema, y estaríamos en presencia de una especie de sistema "supercontradictorio" totalmente "homogeneizado", en el sentido de que en él "todo vale". Es evidente que un sistema axiomático no debe convertirse en un caos homogéneo de tal naturaleza; es necesario poder discriminar entre lo que es sintácticamente válido y lo que no lo es. Por otra parte, si el sistema no es consistente, no tiene aplicación posible, es decir, no admite modelos. Desde luego, algún excéntrico podría interesarse en él, pero en principio dirigimos nuestra atención a los sistemas que pueden ser aplicados a la realidad física o a los objetos propios de la matemática misma. Por todo ello, la consistencia de un sistema es una propiedad no sólo conveniente sino incluso indispensable.

Consideremos ahora la propiedad de completitud. Si tomamos una cuasiproposición del sistema e imaginamos que, al menos en forma potencial, ella expresa un estado de cosas posible en una eventual interpretación, sería conveniente que el sistema axiomático pudiera resolver de antemano el problema de si tal estado de cosas es admisible o no. Por lo cual podría decirse que la propiedad de completitud implica que, para todo problema sintácticamente formulable en el sistema, en una interpretación que exprese una duda acerca de si las cosas son o no de cierta manera, sea posible, al menos teóricamente, contestar por *sí* o por *no*. Esta propiedad es atractiva, aunque por desgracia no siempre los sistemas axiomáticos interesantes la poseen.

Respecto de la saturación, equivalente a la completitud, debemos tener en cuenta que si un sistema está saturado entonces tiene la máxima "fuerza" posible para demostrar teoremas sin que se presenten contradicciones. Esto muestra que un sistema saturado tendrá sintácticamente (en teoría y no prácticamente) un poder máximo de resolución de problemas y no es necesario sustituirlo por otro más "fuerte" que podría ayudarnos a resolver problemas formulados en el lenguaje del sistema axiomático dado.

La independencia de un sistema, como hemos señalado, puede ser mero asunto de elegancia y economía. Pero conviene indicar que si un sistema es independiente, es decir, todos sus axiomas son independientes de los restantes, y considerando como ejemplo paradigmático el caso de las geometrías no euclideanas, sería posible "bifurcar" el sistema tomando, en lugar de cada axioma, su negación. Ello daría una vía para considerar otro sistema que quizás pueda describir nuevas y distintas estructuras. Desde el punto de vista del progreso del conocimiento tal cosa sería muy interesante, porque al sistema anterior se agregaría ahora otro cuyas posibles aplicaciones serían distintas de las que ya pudiese tener el primero. Por lo cual la independencia ofrece un instrumento de creatividad para el estudio de nuevas estructuras desde un punto de vista sintáctico.

La decidibilidad sintáctica implica una posibilidad sumamente interesante. Si un sistema axiomático presenta esta propiedad, un sistema computacional (por caso una poderosa computadora) podría en principio, dados los axiomas, establecer para toda cuasiproposición si ella es o no teorema del sistema dado. Lamentablemente, no todos los sistemas axiomáticos gozan de esta propiedad, y así sucede incluso con algunos sumamente significativos que analizaremos más adelante. En cuanto a la satisfactibilidad, ella está vinculada con la posibilidad de aplicar el sistema a una cierta problemática física, matemática o económica, y de allí su gran importancia. La categoricidad semántica o por isomorfismo resulta del mayor interés por lo siguiente: un sistema axiomático caracteriza en principio a *una* determinada estructura, pero si es categórico, todos sus modelos son isomórficos, lo cual significa que todos ellos, en cierto modo, conforman una *misma* estructura aunque no hagan referencia, desde el punto de vista ontológico, a las mismas entidades. Finalmente, la completitud semántica, no siempre presente en importantes sistemas axiomáticos, implica saber si el sistema es

lo suficientemente poderoso como para que toda cuasiproposición que se ha hecho verdadera en todos los modelos pueda ser obtenida como teorema. Sin duda, los sistemas axiomáticos que presentan esta propiedad son particularmente privilegiados.

Lógica y sistemas sintácticos

Ya hemos señalado que la noción de sistema axiomático es un caso particular de otra, la de sistema sintáctico. En un sistema axiomático hay aspectos arbitrarios, como la elección de los términos primitivos o la de los axiomas. También es arbitraria la elección de la lógica subyacente, pero sólo hasta cierto punto, pues elegir "una" lógica (sea cual fuere) supone respetar la idea de que el razonamiento correcto es aquél que, por su forma, conserva la verdad. Tanto en los ejemplos de sistemas axiomáticos que hemos ofrecido como en particular en la geometría de Euclides o en las no euclideanas, se ha de respetar la condición de que, en el desarrollo del sistema, aquello que se ha obtenido por deducción lo haya sido empleando reglas de razonamiento correctas. Ello es lo que permite la existencia de la matemática aplicada. Si un sistema axiomático se ha de emplear para investigar en determinado campo de la física, la biología o las ciencias sociales, es necesario garantizar que, si los axiomas se convierten en verdades, lo mismo ocurra con los teoremas, y ello sólo será así si se han empleado formas correctas de razonamiento.

Pero nada impide que inventemos nuevas lógicas del mismo modo en que se inventan diferentes juegos de ajedrez. Una lógica determinada, no tradicional, puede imponer arbitrariamente cuáles son los requisitos para que haya reglas de razonamiento correctas, arbitrariedad que hallamos también en las reglas de movimiento de los distintos ajedreces. En la filosofía de la lógica contemporánea aparece el problema de las llamadas "lógicas divergentes", aquéllas que se obtienen si se rechazan uno o más principios lógicos de la lógica tradicional, de raíz aristotélica, como por ejemplo el principio de tercero excluido: "una proposición es verdadera *o bien* es falsa". En la actualidad, tal cosa no aterroriza ni a un matemático ni a un lógico ni a un filósofo, aunque por cierto hay que ofrecer justificaciones filosóficas acerca de por qué es posible adoptar tales lógicas. Más adelante se presentará la cuestión de la necesidad de adoptar una lógica en la que no se cumpla el principio de tercero excluido, vinculada con lo que se llama el *neointuicionismo* en matemática. También hay que señalar que, ya desde Hegel en adelante, y en la actualidad a propósito de las "lógicas paraconsistentes" del lógico brasileño Newton C. A. da Costa, se puede aceptar una formalización en la cual es posible aceptar violaciones al principio de no contradicción: "ninguna proposición puede ser *a la vez* verdadera y falsa". Si esto es así, también pueden ser arbitrarias las reglas lógicas y es costumbre entonces no denominarlas "reglas lógicas de deducción", sino "reglas de transformación" o

"de producción". Aquí hay que pensar que, elegidos arbitrariamente los axiomas, éstos dan lugar a transformaciones o a producciones de teoremas, no a deducciones. A esto hay que agregar que, si aceptamos a la lógica como un aspecto lingüístico arbitrario del discurso, también las categorías que se emplean para introducir los términos primitivos pueden diferir de aquéllas a las que estamos acostumbrados. Lo advertimos en la filosofía matemática contemporánea, porque hay autores que prefieren no emplear como primitivas las categorías aristotélicas, y partir, como en la lógica combinatoria del lógico Haskell B. Curry, de la noción matemática de *función* como categoría primitiva.

Precisamente, insistimos, cuando se permite que las categorías y las reglas de deducción sean distintas de las de la tradición clásica aristotélica, se habla de *sistemas sintácticos*, que tienen la mayor similitud posible con el ajedrez por el carácter arbitrario de los signos, las categorías, las definiciones de fórmulas o expresiones bien formadas y las reglas de producción. La investigación de los sistemas sintácticos en el siglo XX y en la actualidad ha tenido gran desarrollo y éxito en dos direcciones distintas. Una de ellas ha sido promovida por los lógicos, porque la lógica misma se transforma en un gran sistema sintáctico, que hay necesariamente que estudiar no solamente por razones lúdicas sino también por sus posibles aplicaciones a la ciencia a la hora de cambiar nuestras ideas acerca de cómo se realiza una deducción. La otra dirección pertenece al diseño de algoritmos utilizados en informática, que en muchos casos son, precisamente, sistemas sintácticos. Cuando se trata con éstos, también es posible realizar interpretaciones, en cuyo caso se tendrán los llamados *sistemas semánticos*. Pero no nos adentraremos en consideraciones detalladas acerca de ellos[4].

Verdad y verdad lógica

Señalamos reiteradamente que, si adoptamos la tradición aristotélica, una proposición será verdadera si existe correspondencia entre lo que se expresa en ella y lo que efectivamente ocurre en la realidad. La proposición "esta pared es verde" será verdadera si y solo si la pared de la que estamos hablando es verde y no de otro color. Pero ocurre a veces que la verdad de una proposición, a diferencia de lo que sucede en el ejemplo anterior, no depende del modo en que se nos presenta la realidad, sino de su propia estructura lógica. Si una proposición es verdadera en virtud de la forma lógica que posee, decimos que estamos ante una *verdad lógica*. Así sucede en ejemplos tales como "esta pared es verde o no es verde"; para decidir que es efectivamente verdadera no necesitamos inspeccionar el color de la pared. Una verdad lógica es irrefutable,

4 Sobre este punto, el lector puede consultar el libro *Fundamentos de lógica y matemáticas*, de Rudolf Carnap, Madrid, Talleres Ediciones JB, 1975. (El original es de 1939.)

lo cual, en principio, parecería conformar una ventaja solemne, pero a la vez, desde el punto de vista informativo, carece del interés que sí tienen las verdades no lógicas. Las verdades lógicas son triviales y no informan acerca de la realidad. Si tuviésemos que viajar a Rosario y preguntásemos cuáles son las condiciones meteorológicas en esa ciudad, la respuesta "allí llueve o no llueve" no nos servirá de mucho pese a ser verdadera. Las proposiciones interesantes en ciencia son aquéllas cuya verdad no es lógica, pero para el análisis de las deducciones es muy importante a veces utilizar verdades lógicas porque son ellas las que permiten las transformaciones que desde las premisas conducen a las conclusiones.

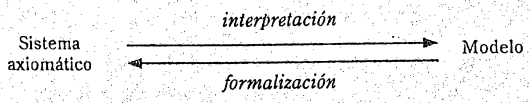
Éste es un punto que vale la pena tener en cuenta, porque a veces lo que se le pide a los sistemas sintácticos no es que estén formalizando la noción de verdad, sino la noción de verdad lógica. Las más conocidas formalizaciones de la lógica actual procuran en general que todo aquello que se demuestra en el sistema sintáctico de la lógica que se ha elegido se transformen, en las interpretaciones más importantes, en verdades lógicas, no simplemente en verdades. En cualquier texto de lógica formal contemporáneo, la lógica es presentada en forma de sistema sintáctico, y allí sé verá que en las interpretaciones útiles que de ella se hacen se trata con verdades lógicas. Los sistemas axiomáticos, en cambio, se intentan desarrollar por las aplicaciones que puedan tener en ciencias como la física o la biología, y de allí que se orienten en otra dirección. Los modelos interesan porque en ellos los axiomas se convierten en proposiciones verdaderas en forma no trivial, y de poco serviría que tales axiomas se convirtiesen en verdades lógicas.

La completitud semántica puede interpretarse en dos sentidos. El primero consiste en que un sistema axiomático es semánticamente completo con *relación a un dado modelo* si toda cuasiproposición que sea verdadera en el modelo resulta ser teorema en el sistema. Pero también hablamos de completitud semántica *con relación a todos los modelos del sistema* cuando toda cuasiproposición que sea verdadera en todos los modelos es un teorema en el sistema. Si hablamos de "verdad lógica" en lugar de "verdad" (a secas) obtenemos la noción de *completitud semántica con respecto a la verdad lógica*: un sistema axiomático es completo con respecto a la verdad lógica si toda cuasiproposicion del mismo que sea lógicamente verdadera en todos sus modelos aparece como teorema.

Formalizaciones

La noción de *formalización* es polisémica, ya que puede ser concebida en sentidos muy diversos. Sin embargo, para los propósitos de este libro, la entenderemos del siguiente modo: la formalización es el proceso *inverso* a la interpretación. Si se tiene un sistema axiomático y se le da una interpretación, el sistema

ha quedado interpretado y constituirá, quizás, un modelo del sistema. Pero, a la inversa, podemos tener entre manos un discurso semántico sobre un tema y comprender, de pronto, que tal discurso conforma un modelo de un sistema axiomático determinado. En este caso decimos que el sistema axiomático *formaliza* el problema que estamos investigando en términos semánticos. El proceso es inverso al de interpretación porque lleva desde lo que se ha entendido como modelo hacia el sistema axiomático correspondiente, en tanto que la interpretación obviamente hace lo inverso:



Aquí podríamos preguntarnos: ¿cuál puede ser, desde el punto de vista metodológico, la ventaja o la necesidad de formalizar? Cuando formalizamos, el sistema axiomático que resulta presenta una nitidez y un rigor que no se encuentran en el discurso semántico; y particularmente en el discurso ordinario. Ello permite un control metodológico muy eficaz de todo aquello que presupone la tarea de operar con el discurso semántico. En particular, pone en evidencia con claridad la pertinencia de las demostraciones empleadas y su corrección, lo cual puede ahora ser realizado de manera no ambigua ni imprecisa, algo que el lenguaje ordinario no permite. Pero no es ésta la única ventaja de la formalización. Resumámoslas todas ellas en cinco puntos: (1) elimina la vaguedad propia del discurso ordinario; (2) permite el uso nítido de la lógica formal; (3) permite "calcular" y "computar" sin necesidad de atender a los significados del discurso semántico; (4) permite descubrir estructuras con configuraciones emparentadas con la estructura semántica dada, algo que estaba "enmascarado" en el discurso semántico; (5) permite, por consiguiente, advertir que estructuras distintas aludidas por diferentes manifestaciones semánticas corresponden a un único conjunto de condiciones expresadas formalmente por un único sistema sintáctico.

Síntesis de las propiedades y requisitos más importantes de los sistemas axiomáticos

Propiedades sintácticas

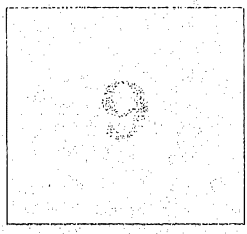
Consistencia	Un sistema axiomático es consistente si no puede haber en él, a la vez, un teorema tal que su *negación* también sea teorema.
Completitud sintáctica	Dada una cuasiproposición cualquiera del sistema, el desarrollo del mismo permite demostrarla o bien demostrar su negación.
Saturación	Un sistema axiomático está saturado si no existe la posibilidad de ampliarlo con un nuevo axioma que no es teorema del sistema dado ni tampoco lo es su negación.
Independencia de una cuasiproposición con respecto a los axiomas	Una cuasiproposición es independiente de los axiomas de un sistema si ella no es teorema del sistema ni tampoco lo es su negación.
Decidibilidad sintáctica	Un sistema axiomático es sintácticamente decidible si existe un método tal que, para toda cuasiproposición del sistema, permite poner en evidencia si ella es teorema o no en el sistema.

Propiedades semánticas

Satisfactibilidad	Un sistema es satisfactible si posee al menos un modelo.
Categoricidad semántica	Un sistema es categórico si todos sus modelos son isomórficos.
Completitud semántica	Un sistema axiomático es semánticamente completo con relación a todos sus modelos si toda propiedad que se cumple para todos sus modelos puede ser demostrada en el sistema como teorema. Un sistema axiomático es semánticamente completo con relación a un dado modelo si toda propiedad que se cumple en el modelo puede ser demostrada en el sistema como teorema en el sistema.
Decidibilidad semántica	Un sistema axiomático es semánticamente decidible con relación a un determinado modelo del sistema si existe un método para poner en evidencia, para toda proposición verdadera en tal modelo, si ella es deducible o no en el sistema dado.

- Un sistema axiomático sintácticamente completo está saturado, y a la inversa.
- Si un sistema axiomático es satisfactible, debe ser consistente. Sin embargo, no necesariamente ello debe ocurrir a la inversa, es decir que un sistema consistente puede no ser satisfactible.
- Una cuasiproposición no es demostrable a partir de los axiomas de un sistema axiomático si el sistema axiomático formado por los axiomas del sistema dado y la negación de la cuasiproposición es satisfactible, es decir, si el nuevo sistema es consistente.

Establecidas algunas propiedades de los sistemas axiomáticos y ciertos requisitos que en principio se les demandan, estamos ya en condiciones de tratar con sistemas de primordial importancia para la matemática: los que conforman nuestras ya bien conocidas geometrías no euclideanas. Podemos ahora preguntarnos acerca de sus propiedades y si satisfacen o no algunos de los requerimientos que hemos presentado, en particular el de consistencia. En este último caso, habrá que analizar, por tanto, si las geometrías no euclideanas admiten o no modelos. Desarrollaremos el punto en el capítulo siguiente.



Las geometrías no euclideanas como sistemas axiomáticos: consistencia y modelos

El problema de la consistencia de las geometrías no euclideanas

Después de haber contemplado aspectos de la metodología de los sistemas axiomáticos y de las propiedades de éstos, retornamos al tema de las geometrías no euclideanas. El lector recordará que cuando se las descubrió se puso atención al hecho de que, construyendo demostraciones a partir de los axiomas de las geometrías no euclideanas, se obtenían al comienzo algunos viejos teoremas de Euclides. Por ejemplo, en la geometría de Gauss, Bolyai y Lobachevsky aparecían todos aquellos que en los *Elementos* están comprendidos entre el 1 y el 28, y que no requieren para su demostración del quinto postulado, pero a partir de allí se presentaban teoremas un tanto extraños o sorprendentes, como por ejemplo el que afirma que la suma de los ángulos de un triángulo es *menor* que dos rectos. Pero ello, sin embargo, no conducía a ninguna contradicción. En cierto modo esta circunstancia dio carta de ciudadanía a las geometrías no euclideanas, pero a partir de entonces hubo que pagar una cierta deuda, pues nadie sabía si tarde o temprano no habría de aparecer alguna contradicción inesperada. Podría suceder, por ejemplo, que ésta sólo se pudiera descubrir después de un fastidioso y tesonero trabajo de centenares de años.

Pero ahora podemos reformular el problema anterior con nuevos elementos de análisis. ¿Son consistentes los sistemas axiomáticos de las geometrías no euclideanas? ¿O bien la contradicción aparecerá tarde o temprano? Para contestar las preguntas anteriores, Hilbert propuso inicialmente un método similar al que en matemática es llamado "principio de inducción matemática". Este principio se puede exponer del siguiente modo. Supongamos tener una sucesión de proposiciones p_1, p_2, p_3, p_4... que involucran a los números naturales 1, 2, 3, 4... Si se puede demostrar que: (a) la primera proposición (p_1) es verdadera; y que (b) la suposición de que una proposición cualquiera (p_n) es verdadera permite demostrar que la siguiente (p_{n+1}) también lo es, entonces *todas* las proposiciones de la sucesión serán verdaderas. En el caso de un sistema axiomático, la propuesta de Hilbert significaba mostrar: (a) que ningún axioma de determinada geometría no euclideana es en sí mismo contradictorio, lo cual es cierto; y (b) que si al cabo

de n pasos deductivos no se han obtenido contradicciones, tampoco será contradictoria la conclusión que surge del siguiente paso, es decir, una vez realizados $n+1$ pasos. Pero este programa resultó demasiado complejo y no condujo a resultados significativos, por lo cual Hilbert hubo de emprender otro camino.

Recordemos que, como hemos señalado en el capítulo anterior, si un sistema es satisfactible, es decir, tiene al menos un modelo, debe ser consistente. Este resultado, debido al propio Hilbert, es muy importante, y nos dice que si alguien quiere mostrar que un sistema axiomático no lleva a contradicciones lo que debe hacer es tratar de hallar un modelo del mismo. Por consiguiente, la pregunta acerca de si una determinada geometría no euclideana es consistente y por tanto no puede llevar a contradicciones, puede enfocarse de acuerdo con esta metodología hilbertiana de la siguiente manera: ¿puede encontrarse al menos un modelo para dicha geometría? En principio, la respuesta es afirmativa.

Consistencia y modelos: el modelo de Klein

Expondremos, de una manera abreviada y no totalmente rigurosa, un modelo de geometría no euclideana propuesto en 1871 por el matemático alemán Felix Klein (1849-1925), si bien otro anterior, más complicado, había sido ya concebido en 1868 por el italiano Eugenio Beltrami. Klein, nacido en Dusseldorf, estudió física y matemática en la Universidad de Bonn, y fue profesor en diversas universidades alemanas (Bonn, Erlangen, Munich, Leipzig, Gotinga). Sus contribuciones más importes a la matemática se hallan en el estudio de las geometrías no euclideanas, la llamada "teoría de grupos" y la topología. En 1872, en colaboración con el matemático Marius Sophus Lie, presentó el llamado *Programa de Erlangen*, de gran influencia para la matemática subsiguiente, en el cual se sistematizan todas las geometrías a partir de la noción de *grupo*. Murió en Gotinga, luego de haber recibido en vida múltiples distinciones de instituciones académicas europeas.

El modelo de Klein, que se aplica a la geometría de Gauss, Bolyai y Lobachevsky, es un tanto curioso porque los elementos de la columna derecha del diccionario se toman de la geometría euclideana, y por ello, en principio, suele presentar algunas dificultades para comprenderlo. Que se proceda de este modo puede parecer extraño, pero es totalmente permisible: no hay inconvenientes en que se tomen ciertas "entidades" del espacio euclideo para construir el modelo de una geometría no euclideana. En la interpretación de Klein, en la columna izquierda del diccionario tendremos "punto", "recta", "plano", "pasar por", "entre" y "distancia"[1]; a la derecha, la correspondiente traducción en términos

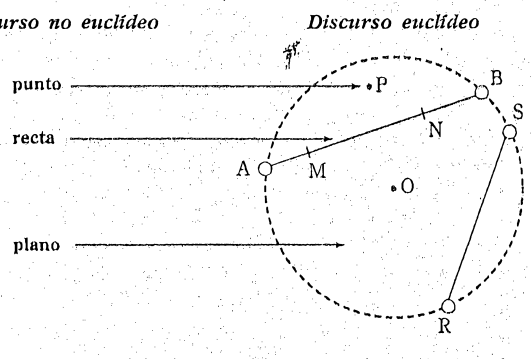
1 En el sistema de Hilbert el término primitivo es "congruencia" y no "distancia" como en el modelo de Klein. En éste, a partir del término "distancia" se define luego "congruencia".

euclídeos. Para simplificar, trataremos sólo con la geometría plana. Entonces consideramos, en un plano euclídeo, un determinado círculo con centro en un punto O y los puntos que están a una distancia *menor* que el radio, los llamados *puntos interiores* del círculo. Y la interpretación que daremos es la siguiente:

- **punto** (término primitivo de la geometría no euclideana) se corresponde con "punto interior del círculo" (en la geometría euclideana);
- **recta** (término primitivo de la geometría no euclideana) se interpreta como "cuerda del círculo sin sus extremos" (en la geometría euclideana);
- **plano** (término primitivo de la geometría no euclideana) se corresponde con el dado círculo sin su borde, es decir, sin la circunferencia que lo limita (en la geometría euclideana);
- **pasar por** (término de relación diádica de la geometría no euclideana) se interpreta como "pasar por" (en el sentido euclídeo);
- **entre** (término de relación triádica de la geometría no euclideana) se interpreta como "entre" (en el sentido euclídeo).

Más adelante tendremos que considerar otra correspondencia, algo más compleja, para el término "**distancia**" de la geometría no euclideana.

En la figura de la página siguiente tenemos las columnas del diccionario que se refieren a tres términos primitivos de la geometría no euclideana y sus traducciones a la euclídea. La primera contiene términos específicos del sistema axiomático correspondiente a la geometría de Gauss, Bolyai y Lobachevsky; para destacarlo, indicaremos las palabras en negrita, es decir, **punto, recta, plano, pasar por** y **entre**. El "discurso negrito" es el de la geometría no euclideana. A la derecha tenemos los términos correspondientes al discurso de la geometría euclideana ordinaria: *punto interior de un círculo, cuerda sin extremos, círculo sin borde, pasar por* y *entre*. En el discurso euclídeo empleamos palabras escritas de manera normal, sin destacarlas en negrita. De este modo queda claro, como en un diccionario, que estamos traduciendo la palabra escrita en negrita de un lenguaje (no euclideano) a la palabra escrita de manera normal de otro (euclideano). La palabra "**punto**", en negrita, pertenece al discurso no euclideano, y corresponde, en la interpretación, a "punto interior del círculo", expresión del discurso euclideano. Adviértase en la figura que, por ejemplo, A y B son puntos geométricos del discurso euclídeo pero *no son* **puntos** del discurso no euclídeo porque no son interiores al círculo. Por el contrario, M y N, del discurso euclídeo, sí son **puntos** del no euclídeo, a los que debemos llamar, cuando nos refiramos a ellos, **M** y **N** (en negrita).



Hemos dibujado en el plano euclideano también una cuerda sin sus extremos R y S. Esta última afirmación pertenece al "discurso normal" de la geometría euclídea; en el "discurso negrito" de la geometría no euclídea se trata de una **recta** que podríamos llamar RS (sin negrita, porque ni R ni S pertenecen a dicha **recta**.) Lo mismo sucede con la **recta** AB. Ahora bien, ¿se cortan las **rectas** AB y RS? Si el lector afirma que sí porque las prolongaciones de las cuerdas se cortan *fuera* del círculo está pensando en términos euclideanos. La respuesta es incorrecta, porque las **rectas** AB y RS, según el "discurso negrito", comprenden todos los puntos de las dos cuerdas *sin sus extremos*, de modo que no se extienden más allá de tales límites: dichas **rectas** no se cortan. Hablar de "puntos de la circunferencia" o de "puntos exteriores al círculo" *carece por completo de sentido* en el discurso no euclideano. Para emplear una imagen popularizada por la divulgación científica, si en los puntos interiores del círculo euclideano viviesen ciertos seres no euclideanos, los **puntos**, éstos no podrían nunca abandonar el círculo y ni siquiera ocupar su borde. Quizás en ese curioso mundo no euclideano algunos escritores de ciencia ficción podrían escribir relatos en los cuales el protagonista abandona su mundo e ingresa al mundo euclideano (concebido por matemáticos no euclideanos un tanto excéntricos y amantes de la especulación), pero todo ello sería entendido al modo de una simple fantasía o una consideración metafísica.

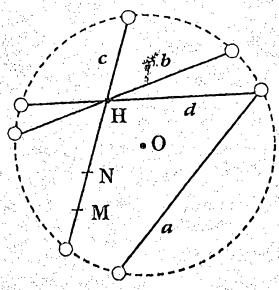
Sin embargo, la metáfora de asimilar los **puntos** a habitantes del mundo no euclideano y puntos (sin negrita) a habitantes del mundo euclideano resultará muy útil para evitar confusiones a la hora de interpretar nuestras figuras. Los habitantes del mundo euclideano (puntos) podrán estar ubicados dentro o fuera del círculo, o en su borde, pertenecer a una cuerda AB con sus extremos, y uno de tales puntos, fuera del círculo, será la intersección de la recta determinada por A y B y la recta determinada por R y S. En cambio, los habitantes del mundo no euclídeo, los **puntos**, que debemos indicar en negrita, podrán ubicarse únicamente en el interior del círculo y ser, por ejemplo, **puntos** de la **recta**

AB o de la recta RS, excluidos estos extremos, o el **punto** llamado por ellos O. Insistimos entonces que, en las figuras, el uso de las negritas nos dirá que hablamos del mundo no euclideano; en caso contrario, si empleamos letras o palabras escritas *sin* negrita, estaremos hablando del mundo euclideano.

Esta interpretación de Klein, así presentada, parece en principio una mera curiosidad. Pero ahora nos preguntamos: los axiomas de la geometría no euclideana, ¿se cumplen o no en la interpretación, es decir, se convierten o no en proposiciones verdaderas? Advierta el lector que no empleamos "verdadero" en sentido aristotélico; cuando decimos que una proposición de la geometría euclídea es verdadera, queremos decir que es teorema de dicha geometría. (Recuérdense las nociones de "verdad sintáctica" e "interpretación de un sistema axiomático sobre otro sistema axiomático" que introdujimos anteriormente.) Si se cumplieran los axiomas, la interpretación de Klein sería un modelo de la geometría no euclideana; en caso contrario, lo anterior tendría muy poco valor, y habríamos propuesto caprichosamente una interpretación absurda. Pero no hay peligro de que ello ocurra: *la interpretación de Klein es un modelo de la geometría no euclideana de Gauss, Bolyai y Lobachevsky.*

Para comprobarlo, se pueden tomar los axiomas de la geometría no euclideana de Gauss, Bolyai y Lobachevsky y advertir que todos ellos se convierten en afirmaciones sintácticamente verdaderas en la interpretación que hemos ofrecido[2]. Por ejemplo, consideremos los postulados según los cuales "por dos **puntos** pasa una **recta**" y "por dos **puntos** no pasa más de una **recta**" (que en la formulación de Hilbert son *dos* postulados de enlace y que corresponden al único primer postulado de Euclides en los *Elementos*). Comprobamos, en el discurso euclideano, que por dos puntos interiores a un círculo pasa una y solo una cuerda sin sus extremos, lo cual, traducido al lenguaje no euclideano, nos conduce precisamente a: "por dos **puntos** pasa una y solo una **recta**". En la figura (donde sus elementos pertenecen al "discurso negrito", no euclideano), ello ocurre con los **puntos** **M** y **N**, por los cuales pasa la **recta** ***c*** y además ésta es única. Los mencionados axiomas de Gauss, Bolyai y Lobachevsky (en la formulación de Hilbert) se han transformado en dos proposiciones verdaderas. Lo mismo sucede con los otros axiomas de dicha geometría no euclidea, si bien para comprobarlo se requiere en algunos casos de la interpretación de "distancia", que no hemos considerado todavía. En particular, *se cumple la negación del postulado de las paralelas*, porque, expresado en el lenguaje euclideano, dada una cuerda sin sus extremos y un punto interior del círculo, pasa por él más de una

2 Debe observarse que si los axiomas de la geometría euclideana se toman según la formulación de Hilbert, éste los plantea *para el espacio de tres dimensiones.* Como la interpretación de Klein es en dos dimensiones, se supone que los axiomas de Hilbert deben reformularse para este tipo de espacio; por caso, el axioma de enlace 7, en el que se mencionan "dos planos α y β" que sólo pueden existir en el espacio tridimensional.



cuerda sin sus extremos y sin ningún punto interior en común con la cuerda dada. En la figura, por caso, por el **punto H**, exterior a la recta ***a***, pasan las rectas ***b***, ***c*** y ***d***. ¿Y por qué dichas **rectas** son "paralelas" a la recta dada ***a*** en el modelo de Klein? *Porque no cortan a ella en un punto interior al círculo.* Por consiguiente el lector puede advertir fácilmente que en la interpretación hay más de una paralela a la recta ***a*** que pasa por el punto H, y en realidad hay infinitas. Como consecuencia, todo teorema de la geometría no euclideana será verdadero en el modelo de Klein; por ejemplo, lo será el que afirma "fuera de una **recta** hay infinitos **puntos**", pues en la geometría euclídea fuera de una cuerda sin sus extremos hay infinitos puntos interiores al círculo que no pertenecen a ella. En la figura, fuera de ***a*** existen los **puntos M, N, H, O** e infinitos otros.

En conclusión, la geometría no euclideana de Gauss, Bolyai y Lobachevsky *tiene al menos un modelo*, el de Klein, es decir, es satisfactible, y por lo tanto es consistente: no puede haber en ella teoremas contradictorios. Puede afirmarse entonces que, en el seno de esta geometría no euclideana, la acumulación de más y más teoremas no llevará nunca a contradicción, afirmación que proviene de una demostración que Gauss, Bolyai y Lobachevsky no estaban en condiciones de realizar. No obstante, es prudente hacer algunas observaciones acerca de la rotunda afirmación anterior. Sabemos que la geometría no euclideana, en tanto sistema axiomático, es un discurso sin interpretar, o sea, sin contenido semántico; y que al diseñar el modelo de Klein lo que hemos hecho es tomarle prestado nada menos que al "enemigo", la geometría euclídea, figuras tales como el interior del círculo o las cuerdas sin sus extremos. Insistimos en que puede parecer extraño que interpretemos la geometría no euclideana estableciendo correspondencias con elementos de la geometría euclídea, pero como ya indicamos ello no ofrece ningún inconveniente. Al fin de cuentas, la geometría euclídea es una ciencia que se desarrolla como si se refiriera a cierto tipo de entidades y a propiedades de ellas, y esta interpretación *geométrica* (euclideana) del sistema axiomático llamado "geometría no euclideana" tiene un carácter similar al de aquéllas que ofrecíamos a propósito del sistema SAFO.

Esta peculiaridad hace que al modelo de Klein se lo haya denominado *modelo relativo* de una geometría no euclideana, porque el diccionario establece correspondencias de la misma con elementos de la geometría euclídea. No es el único. El gran matemático francés Henri Poincaré, por ejemplo, presentó entre 1895 y 1905 otro modelo de la geometría no euclideana de Gauss, Bolyai y Lobachevsky haciendo corresponder **plano** con un semiplano sin su borde, mientras que las **rectas** se interpretan como semicírculos sin sus extremos que tienen su centro en el borde del semiplano. Aunque no discutiremos este modelo, es posible mostrar que se trata de otro modelo relativo de la geometría no euclídea.

Sin embargo, tenemos que abordar ahora un problema que hasta el momento hemos eludido: ¿qué "confianza" podemos tener en la geometría euclideana? Aclaremos la pregunta. La geometría euclídea puede entenderse de dos maneras: (a) como un sistema axiomático formal, o bien (b) como un sistema axiomático interpretado. De hecho, tradicionalmente, se dio por sentada (implícitamente) la segunda acepción, pues se suponía que ella describía el espacio físico y las propiedades de ciertas porciones del mismo o bien, en la tradición pitagórica, de entidades de tipo formal del segundo mundo. Ahora bien, si pensamos en la geometría no euclideana como un sistema axiomático, lo que en realidad hemos hecho con el diccionario que llevó al modelo de Klein es establecer una correspondencia entre los términos primitivos de la misma con términos de la geometría euclídea: hemos traducido el discurso no euclideano al discurso euclideano.

Siendo así, cabe preguntarse si realmente la existencia del modelo de Klein es una prueba de consistencia de la geometría no euclideana de Gauss, Bolyai y Lobachevsky. La respuesta es que *si la geometría euclideana es consistente, es decir, no tiene teoremas contradictorios, entonces debe serlo dicha geometría no euclideana*. La argumentación para probarlo es muy sencilla. Supongamos que la geometría euclideana fuera consistente pero la geometría no euclideana no lo fuese; habría en ésta, entonces, un teorema no euclideano t y otro teorema no euclideano $\sim t$. Siendo así, la traducción de t al discurso euclideano sería un teorema t' de la geometría euclídea, mientras que $\sim t$ se transformaría en $\sim t'$, otro teorema euclideano. Pero ello sería absurdo, pues hemos admitido que la geometría euclídea es consistente y no pueden aparecer en ella tales teoremas contradictorios. Ahora bien, ¿es consistente la geometría euclideana?

Modelos relativos, absolutos e hipotéticos

El tipo de argumentación anterior se llama *prueba de consistencia relativa*. Consiste en hacer corresponder el discurso de un sistema axiomático, mediante una adecuada traducción, al discurso de otro sistema, y luego decidir si este último es consistente o no lo es. Desde luego, puede ocurrir que ello no se

pueda establecer. Pero en caso afirmativo, la traducción garantiza la consistencia del primer sistema, en nuestro ejemplo la geometría no euclideana. Ahora bien, una prueba de consistencia relativa en el caso de la geometría no euclideana es muy importante porque, si tenemos confianza en la consistencia de la geometría euclídea, dicha confianza se extenderá a la geometría no euclideana. Pero, ¿cómo saber si la geometría euclídea es consistente o no? Ya señalamos que no podemos afirmar su consistencia a partir del argumento de que a lo largo de muchos siglos no se ha logrado hallar en ella teoremas contradictorios, pues nada nos garantiza que no aparecerán en el futuro. Lo cierto es que las consideraciones anteriores muestran que la existencia del modelo de Klein no es en realidad una demostración *absoluta* de consistencia de la geometría no euclideana sino *relativa*: si la geometría euclídea es consistente, la geometría no euclideana lo será también. Y aquí hay que reconocer que la historia de la matemática nos ha brindado mucha "confianza" en favor de tal consistencia, lo cual significa que la nueva geometría de Gauss, Bolyai y Lobachevsky merece al menos, a ese respecto, la misma consideración que la geometría euclídea.

Es interesante señalar que, a la inversa, se podría tomar el sistema axiomático de la geometría euclídea y traducirlo al sistema de la geometría no euclideana de Gauss, Bolyai y Lobachevsky. Por ejemplo, existen en esta geometría ciertas superficies llamadas *orisferas* y en ellas ciertas curvas llamadas *oriciclos*, y puede establecerse que la geometría de los oriciclos que existen en las orisferas constituye un modelo relativo de la geometría euclídea. Si el lector tiene curiosidad en saber qué son las orisferas y los oriciclos permítasenos la siguiente aclaración. En la geometría euclídea, si tenemos un plano y en él una recta, y por cada punto de la recta y en un mismo semiplano levantamos perpendiculares a una misma distancia, obtenemos una paralela a la recta dada. Pero este teorema no es verdadero en la geometría no euclideana de Gauss, Bolyai y Lobachevsky: si hacemos lo propio con un **plano** y una **recta** que pertenece a él, y en un **semiplano** levantamos por cada **punto** una perpendicular a la misma **distancia**, no se obtiene una **recta** sino una curva llamada precisamente *oriciclo*. De manera similar, en la geometría euclideana, si por todos los puntos de un plano levantamos perpendiculares a una misma distancia (en el espacio de tres dimensiones), se obtiene un plano paralelo al plano dado, pero ello no ocurre en la geometría no euclideana. Lo que obtenemos en este caso es una superficie llamada *orisfera*, que contiene oriciclos. Y ha sido un descubrimiento muy interesante de los geómetras no euclideanos demostrar que los oriciclos de una orisfera se comportan como las rectas euclideanas, por lo cual estas "entidades" no euclideanas constituirían un modelo de la geometría euclídea. Pero nuevamente estamos en presencia de un modelo *relativo*, y lo que informa lo anterior es que si la geometría no euclideana de Gauss, Bolyai y Lobachevsky es consistente, la geometría euclideana tiene que serlo también. Las consideraciones efectuadas hasta el momento nos muestran, con total generalidad, no que dicha geometría no euclideana o la geometría euclideana son consistentes

en términos *absolutos*, sino que son equivalentes en cuanto al problema de la consistencia: si una de ellas es consistente, la otra también debe serlo. Así que, al menos, nos encontramos con una situación que podríamos llamar "democrática", pues los sistemas axiomáticos formales de estas dos geometrías tienen, desde el punto de vista lógico, el mismo grado de pretensión en cuanto a su posible consistencia: ninguno de ellos puede reclamar el derecho a ser consistente y afirmar, a la vez, que el otro no lo sea.

Durante un extenso período histórico que culmina con la física de principios del siglo XX, muchos estudios de óptica podían ser realizados recurriendo a la ya mencionada "óptica geométrica", la cual, en términos de lo que hemos presentado en el Capítulo 6, resultaría ser una interpretación *física* de la geometría euclideana, y en particular un modelo de ella. En este modelo, se admite que el espacio físico es euclideano, es decir que se describe por medio de la geometría de Euclides, y los rayos luminosos se propagan a lo largo de rectas euclídeas. Pero los físicos actuales piensan que, para distancias de orden astronómico, el espacio no es euclideano, aunque en regiones limitadas del espacio (como en las de nuestra vida cotidiana), se puede aceptar lo contrario. Según la teoría general de la relatividad, cuando un rayo luminoso que proviene de una estrella pasa cerca del borde del Sol no mantiene su trayectoria rectilínea sino que *se curva*, como si el Sol la atrajese. Pero ésta es una descripción *euclidea* del fenómeno. Si se supone que el espacio no es euclideano sino que se describe por medio de la geometría no euclideana de Riemann, los rayos luminosos se desplazan a lo largo de una recta de dicha geometría. Si esto es así, podría sostenerse que la óptica geométrica, en el caso más general, proporciona un modelo para una geometría no euclideana (de Riemann) y, en principio, afirmar que la física garantiza la consistencia de dicha geometría. Pero desgraciadamente debemos reiterar que las proposiciones de la física son solamente *hipótesis* acerca de la estructura del universo y del espacio en el que suceden los acontecimientos; dicho de otro modo, la física no nos proporciona afirmaciones generales concluyentemente probadas.

Aclaremos brevemente este punto. La llamada *concepción hipotética de la ciencia*, característica de las ciencias fácticas, naturales y sociales, supone admitir que las proposiciones científicas son aceptadas sólo a título de hipótesis, cuya verdad o falsedad se desconoce pero a las cuales se las supone provisionalmente verdaderas. Éste es el punto de partida del *método hipotético deductivo*, así llamado porque, una vez formulada una hipótesis es necesario deducir a partir de ella consecuencias lógicas, las *hipótesis derivadas*, algunas de las cuales describirán un estado de cosas que puede o no acontecer en la realidad. Los resultados de cotejar tales consecuencias con lo que realmente ocurre, asunto que requiere de la observación y, de ser posible, de la experimentación, nos dirán si la hipótesis ha quedado *corroborada* o bien *refutada*. En el segundo caso será necesario modificar la hipótesis, "protegerla" por medio de otras hipótesis auxiliares o lisa y llanamente descartarla. Afirmar de una hipótesis que ha sido

corroborada no significa que se haya convertido en una verdad concluyente, pues, por caso, nuevas observaciones y experimentos podrían llegar a refutarla. En la práctica, el científico trabaja con un conjunto de hipótesis fundamentales, punto de partida de su investigación, y tales hipótesis, junto con las conclusiones que es posible obtener a partir de ellas, conforman un *sistema hipotético deductivo*[3].

En suma, los axiomas de la geometría no euclideana de Riemann podrían interpretarse como hipótesis acerca del comportamiento de la luz, y a lo que resulta lo podemos llamar un *modelo hipotético* de dicha geometría. Para un sistema axiomático dado, un modelo hipotético es aquél en el que los axiomas se convierten en hipótesis de un sistema hipotético deductivo para describir aspectos de la realidad. Dichas hipótesis podrán estar suficientemente corroboradas, pero no se entiende por ello, como ya señalamos, que su verdad ha sido concluyentemente establecida: ésta es una característica de toda teoría fáctica. Por lo cual, hablando estrictamente, no estamos aquí ante una prueba absoluta de consistencia. Sólo podemos afirmar, con modestia, que si el sistema hipotético deductivo no lleva a conclusiones refutadas por la experiencia (lo cual, al menos en principio, nos obligaría a modificarlo o incluso a abandonarlo) podremos tener cierta confianza en la consistencia del sistema axiomático formal del que proviene.

Resumamos lo antedicho. Hay tres clases de modelos de un sistema axiomático: *absolutos*, *relativos* e *hipotéticos*. Los *modelos absolutos* son aquellos en que el diccionario de la interpretación vuelve verdaderos a los axiomas del sistema axiomático y por tanto a todas las restantes cuasiproposiciones del mismo (teoremas). En realidad, es muy difícil encontrar modelos de este tipo, que nos permitirían afirmar con certeza la consistencia absoluta de un sistema. El lector puede advertir que para un sistema como SAFO existen ejemplos de modelos absolutos; por ejemplo, si consideramos filas de patos o filas de soldados, en cuyo caso debe interpretarse R como *delante de*. Los modelos de SAFO, en general, no son absolutos salvo que el conjunto de individuos que conforman el sistema al que se refiere la interpretación sea finito, como en el caso de los patos y los soldados. Pero si el sistema interpretado (interpretación) tiene infinitos elementos, ya no se puede afirmar que se trata de un modelo absoluto. En los casos de las geometrías no euclídeas y euclidea no es posible hallar ningún modelo absoluto, y por ello el problema de la consistencia absoluta de cualquiera de ellas ha quedado en suspenso. Pero al menos, a propósito de estas geometrías, hemos encontrado *modelos relativos*. Ellos son los que interpretan un sistema axiomático sobre otro sistema axiomático, de tal modo que nos permiten

3 Esta sucinta exposición no hace justicia a las complejidades del método hipotético deductivo ni a las controversias que ha suscitado. El lector interesado en el tema puede consultar el libro *Las desventuras del conocimiento científico*, de Gregorio Klimovsky, Buenos Aires, A-Z Editora, 1994.

afirmar que, si el segundo es consistente, el primero también lo será. Tendremos aquí, entonces, una prueba de consistencia relativa. Finalmente, tenemos *modelos hipotéticos*, en los cuales el sistema axiomático se interpreta sobre un sistema hipotético deductivo de alguna ciencia fáctica satisfactoriamente corroborado hasta el momento. Por las razones expuestas anteriormente, no se puede garantizar que las proposiciones del modelo hipotético deductivo sean concluyentemente verdaderas, es decir, que la existencia de esta clase de modelos tampoco demuestra la consistencia del sistema axiomático dado.

¿Qué podemos afirmar, a la luz de las consideraciones realizadas hasta aquí, acerca de la consistencia de las geometrías no euclideanas? Puesto que no disponemos todavía de una prueba absoluta de consistencia de las mismas, seguimos ignorando si con el desarrollo de más y más deducciones, en el seno de ellas, llegaremos o no a contradicciones. Dicho de otro modo, los temores que pudieran haber albergado al respecto Gauss, Bolyai y Lobachevsky no han quedado abolidos. Pero al menos hemos avanzado hacia un *desplazamiento* del problema, pues nos hemos instalado en el territorio más sólido y confiable de la geometría euclídea dado nuestro hallazgo de que las geometrías no euclídeas serán consistentes si la euclidea lo es. A su vez, los modelos hipotéticos de un sistema axiomático, si bien desde el punto de vista formal no indican absolutamente nada acerca de la consistencia de aquél, representan un avance desde un punto de vista práctico. Un físico, por ejemplo, podría encontrar satisfactorio el empleo de una geometría no euclideana, al menos por el momento, porque le resulta conveniente para comprender el sector de la realidad que está investigando. Pero debemos insistir en que el problema de la consistencia es fundamental porque, si los sistemas axiomáticos más importantes de la matemática resultasen a la postre contradictorios, inconsistentes, la aventura matemática probablemente habría finalizado definitivamente.

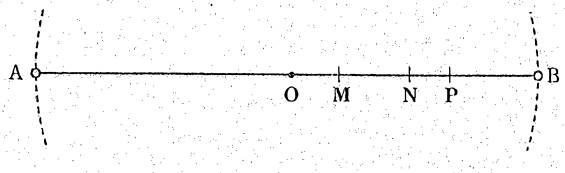
Henri Poincaré y el convencionalismo

A propósito de la noción de modelo de un sistema axiomático, no podemos dejar de citar aquí algunas ideas del ya mencionado Henri Poincaré (1854-1912), eminente físico, cosmólogo y matemático francés, quien realizó importantes y originales aportaciones a la teoría de las ecuaciones diferenciales, a la topología, a la teoría de la probabilidad, a la teoría de las funciones, a la mecánica analítica, a la teoría electromagnética de la luz, a la mecánica de fluidos, a la termodinámica y a la epistemología. (Hoy se lo considera un precursor de la llamada "teoría del caos".) Poincaré publicó más de treinta libros, algunos de los cuales se han vuelto, en particular, clásicos de la filosofía de la ciencia. Fue miembro de la Academia Francesa de las Ciencias y su presidente desde 1906. Por sus aportes a los más diversos campos de la ciencia y la filosofía, se lo menciona como uno de los pensadores más relevantes del siglo XIX.

Poincaré analiza el modelo de Klein a la manera de un relato de ciencia ficción, y supone que el círculo dado, sin su borde, es un cierto país o mundo, y que los puntos interiores al mismo son sus habitantes, metáfora que ya hemos mencionado. Aquí debemos señalar que existe en el modelo de Klein una interpretación para *distancia entre dos puntos* (término de la geometría no euclideana de Gauss, Bolyai y Lobachevsky) un tanto complicada. Es la siguiente:

• la distancia entre dos puntos M y N, $d(M,N)$, se corresponde con $ln \frac{MA/MB}{NA/NB}$, donde *ln* es el logaritmo natural del cociente de razones que se indica.

A partir de esta correspondencia o traducción, se puede comprobar lo siguiente, que el lector (con el recurso a los logaritmos) puede deducir o bien simplemente aceptar sin demostración. Supongamos que en una recta AB (en este caso un diámetro del borde sin sus extremos) tenemos tres puntos pertenecientes a ella, M, N y P, como indica la figura, todos ellos a la derecha de O. Entonces sucederá que, si se quiere conservar la distancia no euclideana, los segmentos euclideanos comprendidos entre O y B que se obtienen serán cada vez más pequeños a medida que nos acercamos al punto (euclideano) B.

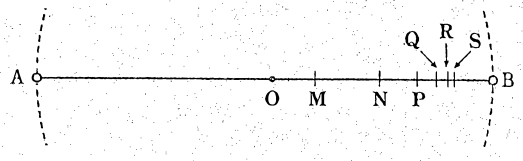


Se cumple:

1. $d(M,N) + d(N,P) = d(M,P)$ o sea que la distancia, en el mundo no euclideano, es *aditiva*;

2. Si $d(M,N) = d(N,P)$ en el mundo no euclideano, entonces NP < MN en el mundo euclideano.

Adviértase que la igualdad que aparece en (2) se refiere a distancias en el mundo no euclideano, mientras que la desigualdad se expresa en el discurso euclideano. Agreguemos ahora, después de P, una serie de puntos Q, R, S ... tales que $d(M,N) = d(N,P) = d(P,Q) = d(Q,R) = d(R,S) = ...$ como indica la siguiente figura.



Desde el punto de vista euclideano, la distancia entre puntos sucesivos se hace gradualmente más pequeña, es decir MN>NP>PQ>QR>RS, y puede probarse, a partir de la fórmula de la distancia, que el agregado de nuevos puntos no permitirá que lleguemos al punto B, límite inaccesible del universo de los "habitantes" del círculo. Si pensamos en "habitantes materiales" de tal universo, es decir, en "puntos físicos", un habitante material que, partiendo de M, quisiera con su automóvil recorrer este camino con velocidad constante, necesitaría de *infinitos* lapsos iguales, durante los cuales avanzaría de M a N, de N a P, de P a Q, de Q a R, de R a S, y así siguiendo, pero jamás podría abandonar su mundo. (En el mundo no euclideano, se trata de recorridos iguales.) Lo mismo sucedería si nuestro automovilista pretendiese avanzar en sentido contrario, hacia A. Esto significa que la recta (no euclideana) es infinita en ambos sentidos, tal como sucede con la recta euclídea[4]. Efectivamente, si a partir de un punto de la recta euclídea avanzáramos en un sentido u otro con velocidad constante, el viaje no finalizaría nunca. El automovilista no euclideano está sometido a una suerte de "maldición": no poder abandonar su mundo por más que avance y avance alejándose de O. Pero lo mismo nos sucedería a nosotros, en nuestro mundo euclideano, si pretendiésemos llegar al "extremo" de una recta a partir de un punto dado de la misma. Ningún habitante no euclideano puede escapar de su universo por más que lo intente, y especular acerca de lo que pudiese haber "más allá" del borde del círculo (e incluso acerca del borde mismo) sería practicar pura metafísica: el mundo de Klein es infinito[5].

De aquí Poincaré extrae una consecuencia de la mayor importancia para las ciencias fácticas. Recordemos que, tal como hemos señalado, el matemático dispone de un "almacén" de sistemas axiomáticos y estructuras posibles, y que el físico elige, de entre ellos, los que a su juicio le convienen para su investigación. Supongamos entonces que un físico, habitante del mundo no euclideano de Klein, se preguntase: ¿qué geometría me conviene adoptar como sistema axiomático apropiado para describir, por medio de una interpretación posterior, el espacio físico del mundo en que vivo? Con la educación recibida en ese extraño país, y con la experiencia adquirida desde su niñez, seguramente le resultaría *intuitiva* la geometría no euclideana de Gauss, Bolyai y Lobachevsky, tal

4 Adviértase que esta propiedad de las rectas del modelo de Klein es similar a la idea de Euclides, en su segundo postulado, según el cual una recta puede ser prolongada indefinidamente (en ambos sentidos). Esta curiosidad del mundo no euclideano de Klein inspiró grabados del gran dibujante holandés Maurits C. Escher (1898-1972). Escher escribió: "A través del enfrentamiento entusiasta a los enigmas que nos rodean, al considerar y analizar las observaciones que he realizado, he terminado en el campo de las matemáticas. Aunque me declaro absolutamente inocente de formación o conocimiento en las ciencias exactas, a menudo parezco tener más en común con los matemáticos que con mis colegas artistas". Los grabados se exponen en la página web http://www.mcescher.com.

5 Nuestro razonamiento se ha aplicado a un "diámetro" del mundo no euclideano, pero la conclusión es válida para cualquier otra recta de dicho mundo.

como nos resulta intuitiva a nosotros la euclideana. Pero supongamos que ciertos matemáticos habitantes del mundo no euclideano hayan podido concebir una curiosa geometría, la que nosotros llamamos *euclideana*, y hayan podido expresarla por medio de un sistema axiomático. Con toda razón, el físico no euclideano podría preguntarse: ¿y no nos convendría tratar de describir las propiedades del espacio por medio de esta nueva geometría euclideana? Si fuese así, el mundo de Klein sería solamente un fragmento del espacio euclideano, y en él se manifestarla un extraño fenómeno físico: el acortamiento de todos los cuerpos rígidos a medida que nos vamos alejando del centro, de tal forma que nunca podríamos acceder a puntos tales como A y B de la circunferencia euclídea. Sin duda, al menos hipotéticamente, nuestro físico podría proceder de este modo.

Lo anterior, en el análisis de Poincaré, motiva una reflexión de carácter epistemológico y una pregunta que atañe a la práctica. La primera conduce a la conclusión de que el emplear la geometría euclídea o bien otra no euclídea para describir el espacio físico depende de nuestras definiciones de distancia y de nuestras definiciones acerca de cuáles son las entidades con las que estamos tratando. Por ejemplo, si nuestro físico del mundo de Klein pretende dar una descripción euclídea del espacio, tendrá que admitir que su definición de distancia no es correcta, y que a ésta habrá que definirla de otra manera; y deberá además aceptar que sus rectas proseguirán indefinidamente más allá de los bordes de su mundo: serán rectas euclideanas. La geometría adscripta a una realidad física, nos dice Poincaré, depende en parte de nuestras definiciones: no es una imposición absoluta. No puede suponerse realmente que para cada estructura física corresponda una única geometría, pues ello depende de ciertas convenciones, razón por la cual la posición de Poincaré es llamada *convencionalismo*[6]. Pero aquí cabe una pregunta: ante tal disponibilidad de opciones, ¿qué geometría nos *conviene* elegir? Surge entonces, como advertimos, una cuestión de índole práctica. La respuesta es: para tratar con nuestras investigaciones, elegiremos aquélla que nos dé una descripción *más sencilla* y facilite por ello nuestras argumentaciones y cómputos. Si a alguien le resultan complicadas las geometrías no euclídeas para describir el espacio físico, podrá quizás preferir la euclídea, lo cual, en opinión de los físicos no sería muy adecuado porque habría que admitir la existencia de ciertas "fuerzas universales" capaces de modificar la longitud de los cuerpos rígidos en el mundo euclideano. En cambio, quien opta por las geometrías no euclídeas no se ve obligado a introducir conceptos metafísicos tales como dichas "fuerzas universales" y los problemas abordados serán más sencillos de tratar.

6 Conviene destacar que cuando Poincaré utilizaba en su época la palabra *convencionalismo*, se refería a ciertas posiciones epistemológicas que él no compartía y a las que trata duramente en sus escritos. Nuestro uso de dicha palabra se refiere específicamente, como se hace hoy en día, a la posición del propio Poincaré.

Tres tradiciones en la historia de la matemática

Hemos considerado hasta el momento, con cierto detalle, las características del llamado método axiomático, que en lo esencial consiste en la construcción de sistemas axiomáticos formales para el abordaje de distintas ramas de la matemática. En este punto, el lector se preguntará si con ello se agota el proceder metodológico de *toda* la matemática. La respuesta es negativa. Si se considera la historia de la matemática, se puede advertir que la actividad de quienes la cultivaron y cultivan se desarrolla en tres direcciones diferentes, las cuales, aunque no son totalmente independientes, son en espíritu y aun en metodología diferentes. Vamos a denominarlas la tradición *axiomática*, la tradición *computacional* y la tradición *estructural*.

La tradición axiomática

Es conveniente comenzar por la tradición axiomática porque, a su modo, ya está presente en la geometría de Euclides y aun antes en el método demostrativo de Aristóteles. En esta tradición la idea central, ya mencionada, es que se parte de principios simples y evidentes, los axiomas, y luego, utilizando las formas correctas de razonamiento que establece la lógica, se deducen a partir de ellos los teoremas. Aquí la actividad matemática se divide en dos etapas: (1) proponer los principios; y luego (2) demostrar (incesantemente) teoremas. De acuerdo con ello, la operación inicial de detectar los principios es prácticamente algo así como establecer el programa genético de una persona, ya que su desarrollo dependerá de alguna manera de cómo sea su dotación en cuanto a cromosomas y genes.

No nos detendremos aquí en mayores detalles acerca de esta tradición, ya que hemos analizado muchas de sus características en capítulos anteriores de este libro, particularmente en lo que respecta a los sistemas axiomáticos formales y el método axiomático. La matemática pura, desde esta perspectiva, se transforma en una suerte de juego formal similar al ajedrez, como hemos señalado en el Capítulo 6. Sin embargo, un sistema formal puede admitir modelos interesantes, en física o en economía, con lo cual ingresamos en el importantísimo territorio de la matemática aplicada, que ya no podemos concebir como un mero juego. Esta orientación de la matemática no encierra todo lo que se investiga en la llamada "matemática moderna", pero la podemos reconocer en el tratamiento de capítulos importantes de la disciplina como el álgebra abstracta.

La tradición computacional

Esta tradición, a la que también podemos llamar *algorítmica*, concibe a la matemática como ocupándose de ciertos "objetos", particularmente números, y de las operaciones y cálculos que se puedan realizar con ellos. De algún modo,

la tradición tuvo su origen en Pitágoras, si bien éste y los miembros de su escuela se ocuparon también de cuestiones geométricas. La podemos encontrar en afirmaciones atribuidas a Pitágoras tal como "los números constituyen la esencia del mundo", que hemos analizado en el Capítulo 2. Lo que se está insinuando aquí parece ser que si nosotros logramos, a través de la adscripción de propiedades aritméticas a los objetos del mundo, o bien por medio de mediciones (cuyo resultado son números), podríamos, mediante el cálculo, resolver problemas destinados a acrecentar el conocimiento acerca de tales objetos.

Indudablemente, ésta es una tradición importante porque, como se puede advertir en las aplicaciones de la matemática al cálculo contable o al de la moderna computación, por ejemplo, los sistemas axiomáticos no cumplen prácticamente función alguna. Hay que tener en cuenta que, en el seno de esta tradición computacional o algorítmica, se ha desarrollado el álgebra, el cálculo infinitesimal y todos los grandes capítulos de la matemática donde, a través del empleo de variables, ecuaciones, determinantes y matrices, se cuenta con instrumentos para actuar sobre los números y obtener datos numéricos como resultado de la investigación.

Esta tradición es dominante en ramas de la matemática aplicada, tal como la podemos encontrar en la física, la química o la informática, en donde en general no se trata con sistemas axiomáticos. Incluso cuando hablamos de álgebra abstracta podríamos decir que la tradición computacional también está presente en ella porque, si bien es cierto que cada uno de los sistemas del álgebra se pueden caracterizar axiomáticamente, lo que en realidad hace el álgebra abstracta es transformar en algorítmica una serie de propiedades que en principio no parecerían susceptibles de cálculo.

En el siglo XIX, un representante arquetípico de esta tradición fue el lógico y matemático británico George Boole (1815-1864), ya citado en el Capítulo 7. Aunque nacido en Inglaterra, desde 1849 fue profesor de matemática en el Queen's College de Cork, en Irlanda, ciudad donde falleció. Boole propuso la "traducción" a símbolos de términos y operaciones de la lógica, creando lo que en su momento se llamó, como ya señalamos, la "lógica matemática". De este modo, según explica Boole en su libro *Investigación sobre las leyes del pensamiento* (1854), con los símbolos lógicos es posible operar de manera similar a como se lo hace en el álgebra. Boole escribió que su propósito era "investigar las leyes fundamentales de las operaciones de la mente, en virtud de las cuales se razona; expresarlas en el lenguaje del cálculo y sobre tal fundamento establecer la ciencia de la lógica y construir su método". De esta manera desarrolló la llamada "álgebra de Boole", de fundamental importancia no sólo en el seno de la matemática pura (por caso, la teoría de conjuntos) sino también en el de la matemática aplicada vinculada con la informática y la electrónica.

En el apéndice de este libro expondremos, para el lector interesado, una presentación del álgebra de Boole a partir de una *ampliación* de nuestro sistema axiomático SAFO.

La tradición estructural

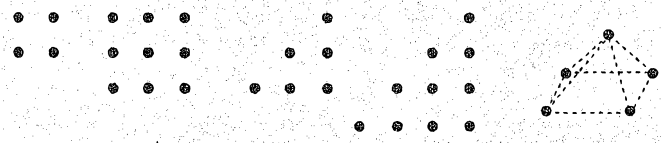
Además de las orientaciones axiomática y computacional, debemos considerar una tercera, la tradición *estructural*. La palabra "estructura" es polisémica, pero en el ámbito de la matemática tiene dos significaciones principales. La primera, en un sentido bastante limitado de la palabra, indica que una estructura es "un conjunto de elementos dentro del cual se toman en consideración ciertas relaciones y propiedades haciendo abstracción de las restantes". Por ejemplo, si consideramos los números naturales y la relación *menor que*, la estructura aquí está caracterizada por: (a) el conjunto de los elementos de la estructura, los números naturales, y (b) una cierta relación interna, la de *menor que*. Se pueden realizar operaciones entre números, tales como la suma y la resta, o vincularlos por medio de relaciones distintas de *menor que*, pero al concebir la estructura anterior todo ello debe ser ignorado.

Es importante advertir que dos estructuras pueden ser distintas por diferir en el conjunto de elementos básicos que se toman en consideración o bien por considerar relaciones y operaciones internas diferentes. Por ejemplo, en lugar de números naturales podemos tomar en consideración números reales o los puntos geométricos del espacio, o bien la relación *mayor que* o la operación "producto". En cada caso obtendremos estructuras diferentes, caracterizadas de una manera no ambigua por el conjunto de elementos que se escogen y por las relaciones u operaciones internas al conjunto. Siendo así, puede suceder que dos estructuras sean distintas pero similares. Una fila de 10 soldados y la relación *delante de* es un ejemplo de estructura, pero también lo sería un fila de 10 patos y la misma relación. Se trata de dos estructuras distintas a pesar de que en algún sentido pudiera decirse que hay cierta identidad de configuración. Indudablemente, si se tratara de dos conjuntos totalmente ordenados, las estructuras obtenidas, aunque semejantes por las condiciones que cumplen, serían diferentes si el número de elementos ordenados no fuese el mismo (1000 soldados y 3 patos, por ejemplo).

Existe en matemática una segunda noción de estructura, a la cual en realidad habría que llamar "tipo de estructura", y que es *un conjunto de estructuras que cumplen una misma serie de condiciones*. Podríamos considerar por ejemplo todas las estructuras en donde hay una determinada relación de orden, por ejemplo las estructuras numéricas en las que hallamos relaciones tales como *menor que* (y así tendríamos ordenados de menor a mayor los números naturales, los enteros, los racionales o los reales), pero también estructuras geométricas como la recta cuyos puntos han sido ordenados de izquierda a derecha. Aquí las condiciones están dadas para estar en presencia de un tipo de estructura porque la relación que se ha tenido en cuenta tiene que cumplir las propiedades de ser *reflexiva* (ningún elemento tiene la relación consigo mismo) pero a la vez *transitiva* (si un elemento tiene la relación con un segundo elemento y el segundo con el tercero, el primero la tiene con el tercero). Tenemos en

este caso un *tipo de estructura formal*. Y podría decirse que la matemática, desde la más remota antigüedad pero fundamentalmente en la matemática contemporánea, es el estudio de ciertos ejemplos peculiares de estructuras.

Ya en Pitágoras y sus seguidores advertimos la preocupación por ciertos tipos de estructuras. Por ejemplo, sus estudios sobre los números cuadrados, triangulares, piramidales, etcétera, estarían dirigidos a estudiar un cierto tipo peculiar de estructura donde los elementos (puntos) de la estructura están configurados geométricamente de una determinada manera:



Dos números cuadrados: 4 y 9 Dos números triangulares: 6 y 10 Un número piramidal: 5

A pesar de que la hemos considerado como ejemplo paradigmático de una formulación axiomática, lo cierto es que también en la geometría de Euclides se consideran ciertos tipos de estructuras. Por ejemplo, un rectángulo sería una estructura formada por elementos, tales como puntos y lados, sujetos a determinadas condiciones de perpendicularidad entre lados contiguos. Por ello la geometría de Euclides es simultáneamente un ejemplo de matemática axiomática pero al mismo tiempo es el estudio de una cantidad enorme de tipos de estructuras geométricas tales como figuras poligonales y espaciales, como los poliedros, y especialmente los poliedros regulares. A partir de la segunda mitad del siglo XX, la consideración de tipos de estructuras matemáticas se ha hecho muy rica y variada. Consideremos como ejemplo el caso de la "estructura de grupo", debida al matemático francés Évariste Galois (1811-1832).

Para que una estructura tenga estructura de *grupo*, en el sentido formal de la palabra, debe estar constituido por ciertos elementos, conformando un conjunto G (grupo), y una cierta operación "$*$" que podríamos denominar "de multiplicación" entre los elementos. El producto de dos elementos del grupo siempre es un elemento del grupo, y se deben cumplir ciertas condiciones que satisfacen los grupos y no otros tipos de estructuras:

(1) la operación tiene que ser asociativa, o sea, si a, b y c son elementos de G, entonces:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

(2) existe, en G, un *elemento unidad* o *neutro, u,* tal que, que multiplicado a a la izquierda o a la derecha por cualquier elemento del grupo lo deja inalterable:

$$u * a = a \qquad a * u = a$$

(3) para todo elemento a existe un elemento a', el *inverso* o *recíproco* de a, que cumple la condición de que el producto de ambos da como resultado el elemento unidad:

$$a * a' = a' * a = u$$

Si se cumple que $(a * b) = (b * a)$, para todo a y b, el grupo se llama *conmutativo* o *abeliano* (en homenaje al matemático noruego Niels Abel). El lector puede comprobar, por ejemplo, que el conjunto de los números enteros es un grupo conmutativo con respecto a la operación "suma" porque se cumplen todas las condiciones que hemos establecido anteriormente.

Quienes se ocupan de álgebras abstractas lo hacen estudiando diferentes tipos de estructuras algebraicas, tales como estructuras de grupo, estructuras de anillo, estructuras de cuerpo, reticulados y muchas otras. (Usamos la palabra *estructura* en su segunda acepción, es decir, como tipo de estructura.) Pero también se estudia cómo se reconocen en problemas importantes de la matemática estructuras formales tales que ya han sido estudiadas y de las cuales podemos utilizar los resultados que la investigación matemática ha puesto de manifiesto. La matemática moderna, en un sentido muy acentuado, es el estudio de estructuras. Así se lo hace, por ejemplo, en la llamada *Enciclopedia Bourbaki*, que es en realidad un enorme museo de estructuras. Podríamos agregar que es aquí quizás donde la imaginación en matemática puede ejercerse con mayor amplitud, porque lo que el matemático debe hacer es descubrir o inventar nuevas estructuras. Es muy interesante advertir que si adoptamos esta dirección nos hallamos en un plano un tanto semántico, pues nos estamos refiriendo realmente a través del lenguaje matemático a ciertos objetos extralingüísticos que son precisamente las estructuras. Hemos tropezado anteriormente con los modelos de los sistemas axiomáticos, es decir, interpretaciones adecuadas de un sistema axiomático, pero generalmente la interpretación se hace sobre una estructura. Por ejemplo, la interpretación de la geometría no euclídea puede hacerse sobre una estructura determinada, como era el caso del modelo de Klein.

Cuando se estudia un determinado tipo de estructura, es necesario ofrecer una serie de condiciones que la definen, y si queremos saber qué clase de propiedades deben cumplirse dentro de esa estructura tendremos que analizar qué se deduce a partir de las propiedades definitorias de la misma. Ello muestra un paralelo entre el método estructuralista y el método axiomático, porque si para estudiar un tipo de estructura debemos dar sus condiciones definitorias y después analizar lógicamente qué es lo que se deduce de ellas, estamos haciendo algo similar a lo que acontece con un sistema axiomático. En cierto sentido los

matemáticos estructuralistas están procediendo paralelamente a los axiomáticos por cuanto, aunque no lo digan expresamente, la definición de un tipo de estructura y la demostración de sus propiedades se corresponde exactamente con la propuesta de los axiomas de un sistema axiomático y la demostración de los teoremas del mismo. De todas maneras, corresponde entender que para esta relación entre los sistemas axiomáticos y los tipos de estructura hay que hacer intervenir la noción de "interpretación". No cabe duda de que en este punto los sistemas axiomáticos estarían interpretados: hablarían acerca de algo.

El matemático que estudia sistemas axiomáticos está de alguna manera caracterizando indirectamente una familia de estructuras, constituida por los modelos del sistema. A quienes estudian estructuras no les interesa tanto la estructura lógica a la que hay que acudir para estudiar las propiedades de aquéllas, sino la estructura misma como entidad a la cual se está dirigiendo la atención. Es una cuestión de énfasis, porque quien estudia un sistema axiomático está analizando las estructuras que servirán de modelo y quien estudia modelos estaría implícitamente definiendo los sistemas axiomáticos que expresan las condiciones definitorias de la estructura. De cualquier manera, se trata de tradiciones distintas. Es muy interesante advertir que en el ámbito de las ciencias fácticas acontece algo similar. En la obra del filósofo Wolfgang Stegmüller sobre el método de las ciencias físicas (y en lo que se llama actualmente la *tradición estructuralista en ciencia*) en lugar de los métodos hipotético deductivistas de la ciencia, que son una suerte de paralelo fáctico del método axiomático en la matemática, se propone estudiar las estructuras a las cuales el físico o el economista dirigen su atención. De manera que, por ejemplo, la mecánica newtoniana, en lugar de ser contemplada como un sistema axiomático especial para la física, se entendería como el estudio de ciertas estructuras especiales, sujetas a "condiciones de ligaduras" (características de la física newtoniana) que vinculan entre sí a ciertas estructuras como la palanca, la balanza, la polea, etc. De cualquier manera, es fácil advertir que la posición estructuralista en las ciencias fácticas también implica que, para definir el tipo de estructura a la cual estamos prestando atención, tengamos que ofrecer una caracterización por propiedades o relaciones que deben ser cumplidas. Al igual que en el caso del método axiomático formal advertimos un cierto paralelismo entre el método hipotético deductivo y el método estructural.

Nuestro examen de las tres tradiciones en la historia de la matemática merece una consideración pedagógica. Quien quiera acentuar el carácter lógico-jerárquico entre las verdades de un sistema axiomático tendrá que poner cierta atención en el adiestramiento lógico del alumno y poner en claro la diferencia entre buenas y malas deducciones y la necesidad de ofrecer definiciones adecuadas. En cambio, si se recurre al método estructural, lo que debe hacerse es desarrollar la atención del alumno hacia el descubrimiento y entendimiento de estructuras. Se comprende entonces por qué, en el caso de un niño, donde es muy difícil aplicar la primera orientación axiomática, se puede sin embargo dar

ejemplos de estructuras. En el llamado "método Gategno" y otros, a través de conjuntos de maderitas o poliedros de cartulina, es posible llamar la atención del alumno hacia ciertas estructuras por medio de la ejemplificación física. Aquí el adiestramiento es intuitivo y está dirigido hacia la objetivación de cosas más que en pensar cuales son las derivaciones lógicas correspondientes. En cuanto a la tercera orientación, la algorítmica, se comprende que lo que hay que hacer es adiestrar prácticamente al alumno para que adquiera la pericia en la solución de los problemas del cálculo. Este es un punto también muy importante, porque las aplicaciones de la matemática a la física y otras ciencias fácticas implican en gran medida reducir los problemas físicos a problemas matemáticos y después calcular con ellos.

Ciencias formales y ciencias fácticas

Hemos ya discriminado, en páginas anteriores, entre ciencias formales y ciencias fácticas. Trataremos ahora de precisar esta distinción. Ella podría ser establecida a partir de la diferencia entre los sistemas axiomáticos y sus interpretaciones; sin embargo, en el discurso habitual de los científicos la expresión "ciencia fáctica" se emplea de una manera más restringida. Lo "fáctico" se refiere a la realidad concreta, es decir a entidades o procesos que existen o acaecen en el espaciotiempo o bien en el ámbito de lo psicológico o lo social, es decir a los *hechos* o *acontecimientos* naturales o sociales. (En latín, *factum* significa precisamente "hecho".) No es costumbre usar la palabra "fáctico" con relación a interpretaciones relativas de un sistema sintáctico en otro sistema sintáctico o interpretaciones que aluden a objetos del segundo mundo platónico de las ideas. Señalemos que para ciertos epistemólogos la creencia de que la matemática se ocupa de "objetos formales" (platónicos) radica en que permitiría uniformar el uso del concepto de "verdad" tanto para las ciencias formales como para las fácticas, observación que debemos al lógico Paul Benacerraff en su artículo "¿Qué es la verdad matemática?"[7]. Cierto es que en el discurso filosófico es costumbre utilizar la palabra "forma" con relación a entidades de este segundo mundo, por lo cual no sería del todo correcto usar la expresión "ciencias fácticas" para la aritmética o la geometría de entidades abstractas. Aunque nada impide que utilicemos la palabra "hecho" también para este tipo de entidades platónicas, no es habitual hacerlo así.

7 Recuérdese lo afirmado en el Capítulo 3 sobre el llamado criterio *semántico* o *de adecuación* de la verdad, original de Aristóteles, según el cual una afirmación es verdadera cuando hay correspondencia entre el presunto hecho que describe con el acaecer de tal hecho, mientras que es falsa si no existe tal correspondencia. En este caso la correspondencia se establecería con "hechos" del segundo mundo platónico.

A las ciencias fácticas se las llama a veces *ciencias empíricas*. Ello no es correcto. La palabra "empírico" se refiere a experiencias cotidianas o a hechos *observables*, pero las ciencias fácticas no se ocupan únicamente de ese tipo de hechos sino también de entidades y hechos *no observables* (llamados a veces *teóricos*). Así, por ejemplo, en la física newtoniana aparece la palabra "masa", que no se refiere a algo observable pero que no es un objeto platónico sino una entidad perteneciente al mundo concreto. Por ejemplo, la teoría atómico-molecular es fáctica pero no empírica.

Está claro que cuando hablamos de la matemática como una ciencia formal o "ciencia vacía" nos referimos a la matemática pura y no a la aplicada. En este punto, hay que tener en cuenta que los modelos relativos pertenecen a la matemática pura y no a las ciencias fácticas, porque implican una mera traducción de un sistema axiomático a otro, como sucede con el modelo de Klein.

Es interesante advertir que estas dos concepciones de la ciencia, la formal y la fáctica, continúan en parte la tradición de la ciencia demostrativa de Aristóteles. Recordemos que una ciencia de esta naturaleza, para el Estagirita, consiste en partir de verdades evidentes (axiomas o principios) y obtener las demás verdades (teoremas) por medio de deducciones a partir de aquellas, las demostraciones. Ya hemos señalado las dificultades inherentes a esta concepción. Sin embargo, advirtamos que algo del espíritu aristotélico permanece, por una parte, en los sistemas axiomáticos de la matemática, pero también en los sistemas hipotético deductivos de las ciencias fácticas.

En cuanto a la lógica, se habla a menudo de *lógica formal*. Ello tiene dos interpretaciones. La primera se vincula con el segundo sentido de la palabra "formal" que hemos descrito en el Capítulo 6, asociado con el pensamiento aristotélico: el estudio de la lógica consiste en analizar los "esquemas" o "formas" de las expresiones y los razonamientos. Pero en la actualidad, en una segunda interpretación, se refiere a la idea de que los sistemas de lógica son meramente sintácticos, es decir que en ellos el aspecto semántico ha desaparecido (cuarta acepción de la palabra "formal"). Desde luego, si interpretamos un sistema de lógica con fines aplicados, las expresiones obtenidas coincidirían con los esquemas formales a los que aludíamos a propósito de Aristóteles. También aquí el espíritu de aquel gran filósofo parece estar presente.

Debemos ahora avanzar un paso más en el análisis del problema de la consistencia de las geometrías no euclideanas y euclideana. Como hemos de comprobar, existe la posibilidad de reducir dicho problema al de la consistencia de la teoría de los números reales y finalmente, al cabo de un proceso que demandó el esfuerzo de muchos matemáticos, al de la consistencia de la teoría de los números naturales. Pero para ello necesitamos presentar previamente las distintas maneras de concebir la lógica contemporánea y en particular caracterizar a la muy importante *teoría de conjuntos*.

La matemática y las lógicas. La teoría de conjuntos

Algo más sobre las lógicas subyacentes de un sistema axiomático formal

El lector habrá advertido la importancia que le asignamos a la lógica en el desarrollo de la matemática; se trata de una disciplina indispensable para ella, como ya lo señalamos reiteradamente. En primer lugar, porque hay que deducir, y hay que saber de qué modo hacerlo. Además es necesario definir y hay que aceptar reglas de definición. Finalmente, se nos presenta la cuestión de las categorías y de la morfología para construir las cuasiproposiciones de un sistema axiomático de una manera que no sea antojadiza y permita interpretaciones que las transforme en genuinas proposiciones. A continuación ampliaremos este punto, para lo cual, como advertirá el lector, tendremos que reiterar algunas consideraciones ya efectuadas en capítulos anteriores a fin de sistematizar el conocimiento de las distintas lógicas que aparecen en el tratamiento de los problemas de fundamentación y filosofía de la matemática.

Ya advertimos en el Capítulo 6 que según ciertos autores no sería posible hablar de *la* lógica, sino de *las* lógicas. Sin embargo, es legítimo todavía llamar simplemente *lógica* a una disciplina que consta de distintos capítulos u orientaciones, las lógicas particulares. La vía clásica inaugurada por Aristóteles, y que se extiende incluso hasta el siglo XX con la obra de Bertrand Russell, implica el reconocimiento de los llamados *principios lógicos tradicionales*. En este sentido, podríamos aceptar que la lógica es una única disciplina que tiene distintos ámbitos de interés y que éstos se van ampliando a medida que se desarrolla la disciplina, como ocurre habitualmente en cualquier otra ciencia. El fundamento básico de esta lógica son los principios lógicos aristotélicos, y por ello aún se la sigue llamando *lógica clásica* para distinguirla de algunas disciplinas lógicas bien distintas que no respetan las ideas de Aristóteles y que nos permiten hablar, si así lo queremos, de *las* lógicas. Sin embargo, hay que reconocer que estas distintas variedades de la lógica, o a veces las distintas maneras de construirlas, no son en modo alguno equivalentes, ni en "fuerza" ni en estructura teórica. Vamos a citar, aunque ya lo hemos hecho parcialmente en páginas anteriores, cuatro subdisciplinas de la lógica que conviene tener en cuenta para nuestras discusiones posteriores. No nos proponemos plantear su desarrollo formal, y sólo aludiremos a su existencia y a sus pretensiones.

La lógica proposicional

Citaremos en primer lugar la *lógica proposicional*, que quizás sea la parte más sencilla de la lógica. Semeja a los algoritmos de la matemática, en cierto sentido, pero en lugar de considerar por caso números y operaciones entre números, emplea proposiciones y operaciones entre proposiciones. En esta lógica proposicional, como lo hemos analizado anteriormente, tenemos la *negación* de una proposición ("~"), la *conjunción* ("∧"), las *disyunciones* ("∨" y "∨"), y también el *condicional* ("⊃") y el *bicondicional* ("≡"). Se admiten además ciertos principios lógicos que ya hemos mencionado, como el de *no contradicción*, según el cual no se acepta el afirmar a la vez una proposición p y su negación ($\sim p$). Otro principio de esta lógica es el *de tercero excluido*; nos dice que, dada una proposición p y su negación $\sim p$, una de ellas será verdadera. Dicho de otro modo, estos principios garantizan que $p \wedge \sim p$ es una proposición falsa y que $p \vee \sim p$ es una proposición verdadera, como sucede en proposiciones tales como, respectivamente, "Marte tiene satélites y Marte no tiene satélites" y "Marte tiene satélites o Marte no tiene satélites". Finalmente, tenemos el principio de *identidad*. Una versión de este principio indica que, una vez que hemos aceptado una proposición, tendremos que volver a admitirla en todas las partes del discurso en donde ella aparezca.

En esta lógica elemental tenemos las ya mencionadas *verdades lógicas*, y las tres leyes o principios que hemos enunciado son en realidad ejemplo de tal cosa. ¿Por qué? La primera, $p \wedge \sim p$, es lógicamente falsa, y por tanto su negación, $\sim(p \wedge \sim p)$ debe ser lógicamente verdadera. Esto último ocurre también con $p \vee \sim p$. Dicho de otro modo, $p \vee \sim p$ y $\sim(p \wedge \sim p)$ son verdades lógicas. Estas proposiciones no son verdaderas por razones fácticas, sino porque se justifican a partir de los principios lógicos. Decir por ejemplo que "Marte tiene satélites o Marte no tiene satélites" es verdadera no requiere de la inspección de Marte con un telescopio. La afirmación es verdadera por razones lógicas: su verdad no se funda en cuestiones que requieran de la inspección del mundo físico. Los principios lógicos están estrechamente ligados a la forma de las expresiones. Las verdades lógicas son seguras, concluyentes, porque son independientes de "lo que pasa", pero a la vez son triviales porque ellas no informan nada acerca de "lo que pasa". Para enterarse de ello hay que acudir a verdades que no sean lógicas, sino que tengan fundamento fáctico; por ejemplo, "Marte tiene satélites" es una proposición que puede darnos conocimiento sobre el mundo, pero cuya verdad no proviene de la forma lógica del enunciado sino del conocimiento astronómico. Hay diferentes maneras, no siempre equivalentes, de enunciar los principios lógicos; por otra parte, éstos no sirven únicamente para legitimar las verdades lógicas sino también para justificar las correcciones de ciertos razonamientos.

Una noción hermana de *verdad lógica* es la de *falsedad lógica*, como acontece con $(p \wedge \sim p)$, que hemos ejemplificado con el enunciado "Marte tiene satélites y Marte no tiene satélites": es falsa independientemente de "lo que pasa"

(con Marte). También se la suele llamar *contradicción*. En síntesis, tenemos tres clases de proposiciones: verdades lógicas, falsedades lógicas y, como se las suele llamar, *contingencias*, en el sentido de que la verdad o falsedad de estas proposiciones no está determinada por los principios o leyes lógicas, sino por informaciones que indican "qué pasa en la realidad", qué es lo que acaece, como en el caso de "Marte tiene satélites".

La lógica elemental de predicados

La lógica proposicional es muy elemental e insuficiente; no puede dar cuenta de razonamientos en apariencia sencillos como éste: "si todos los hombres son mortales, y Sócrates es hombre, entonces Sócrates es mortal". Para ello se necesita realizar un análisis más profundo, en el que aparecen nuevos términos lógicos además de las operaciones lógicas a las que nos hemos referido anteriormente. La primera expansión de la lógica proposicional es la *lógica elemental de predicados*, que es la lógica más simple que se acostumbra utilizar en los sistemas axiomáticos. La hemos empleado para construir el sistema SAFO. En ella tenemos símbolos para individuos y variables para individuos. Se supone que, hasta que no se fije el *valor* de estas variables, ellas pueden representar cualquier individuo. Hay además símbolos para predicados (por ejemplo, P, Q), tales como "mortal", y para relaciones (R, S, T), tales como "mayor que", y para relaciones o predicados diádicos, triádicos, y en general *n*-ádicos.

De acuerdo con ello podemos tener *proposiciones* o bien *formas de proposiciones*. Una proposición sería "*a* es P", que se escribe P*a*, como en "Sócrates es mortal", o bien *a*R*b*, como en "7 es mayor que 3" (proposición relacional). Ya hemos empleado estas notaciones en alguno de nuestros ejemplos de capítulos anteriores. Las "formas de proposiciones" son expresiones que serían proposiciones si no fuera por la presencia en ellas de variables; por ejemplo, *x*R*a* o bien P*x* ∧ (*x*R*y*), donde *x* e *y* son variables *no cuantificadas*. Para obtener una proposición a partir de una forma de proposición hay que reemplazar *x* o *y* por una constante o nombre de individuo, ya sea *a, b, c,* etcétera. Cuando se trabaja con una determinada aplicación de la lógica, se puede suponer que el símbolo *a* representa, por ejemplo, a Sócrates, el *b* a Platón y el *c* a Aristóteles; y que *x* e *y* (variables) admiten como valores a cualquier "griego" o a cualquier "ser humano", según el caso. Si P fuese "mortal" y R "maestro de", la proposición P*a* sería "Sócrates es mortal" y *b*R*c* sería "Platón es maestro de Aristóteles".

A todo ello es necesario agregar los llamados *cuantificadores* (que ya hemos empleado) *para todo*, simbolizado generalmente "∀", y *algún*, o expresado con mayor precisión *existe al menos un*, simbolizado generalmente "∃", encargados de transformar las formas de proposiciones en proposiciones, y que como ya sabemos se llaman, respectivamente, *cuantificador universal* y *cuantificador existencial*. Por ejemplo, si colocamos delante de la forma de proposición P*x* el

cuantificador universal *para todo* obtenemos: "para todo x, x es P", que se escribe $(\forall x)Px$ y cuyo significado es "para todo x, x es mortal" o sea, tal como suele decirse en lenguaje ordinario, "todos los hombres son mortales". Si empleamos en cambio el cuantificador existencial, obtendríamos $(\exists x)Px$, lo cual significa que existe al menos un hombre que es mortal. Obsérvese que, según lo anticipado, los cuantificadores, al ser aplicados a una forma de proposición, producen proposiciones.

Como parte de la lógica elemental de predicados, a estas nociones hay que agregarles las de la anterior lógica proposicional, que es básica para todos los capítulos de la disciplina. La lógica elemental de predicados permite realizar afirmaciones muy variadas: hablar de individuos, predicarle propiedades, indicar sus nexos y vínculos, etcétera. Y existen ejemplos muy importantes de sistemas axiomáticos donde lo que se emplea es precisamente esta lógica elemental; por ejemplo, ya señalamos que Alfred Tarski construyó con ella una versión de la geometría de Euclides-Hilbert en la cual se habla de "puntos", "rectas" y "planos" y se hacen afirmaciones sobre tales entidades formales. Pero justamente porque la lógica subyacente del sistema de Tarski era la lógica elemental de predicados, no se podían hacer con ella afirmaciones sobre "clases (o conjuntos) de puntos"; por ejemplo, no se podía hablar de una "clase de círculos concéntricos", porque un círculo no es un individuo sino una clase o conjunto de puntos. De hecho, la matemática tradicional que proviene de Euclides y se prolonga hasta los siglos XVIII y XIX no podría ser desarrollada exclusivamente con el auxilio de esta lógica elemental de predicados, y ésta es la razón por la cual hay que considerar ahora un tercer tipo de lógica, la *lógica superior de predicados*, y luego una cuarta, la llamada *teoría clásica de conjuntos*.

La lógica superior de predicados

Resumamos lo antedicho. Hablar de lógica en singular puede ser acertado para indicar una problemática genérica, pero en cuanto a sistemas de razonamiento correcto habría que admitir que dicha "lógica en singular" tiene capítulos de estructuras muy distintas, o bien que existen, aun dentro del terreno de lo que se llama la "tradición clásica en lógica", distintos tipos de lógica. Las estamos enumerando desde las más "débiles" hasta las más "potentes" o "fuertes" (es decir, más abarcativas y por lo tanto más adecuadas para abordar problemas de complejidad creciente). Hemos contemplado en primer lugar la lógica proposicional y luego la lógica elemental de predicados, mucho más "potente" que la anterior pues nos da la suficiente capacidad instrumental para tratar con una gran variedad de proposiciones. Sin embargo, las disciplinas fácticas que utilizan la matemática moderna, como la física, la química y otras ciencias, tienen el problema de que su riqueza expresiva es mayor que la que puede ofrecer la lógica elemental de predicados.

¿Qué es una lógica *superior* de predicados? Además de símbolos para propiedades y relaciones, introduce otros para "propiedades de propiedades", "relaciones de relaciones", "relaciones entre propiedades", "propiedades de relaciones", y así sucesivamente. Consideremos un ejemplo. Una propiedad que puede tener un individuo es la de pertenecer al conjunto de los seres humanos, pero si afirmamos que el conjunto de los seres humanos es numeroso, es evidente que "numeroso" es una propiedad de propiedad. La lógica superior de predicados fue construida de manera rigurosa en particular por Bertrand Russell y por David Hilbert, aunque se la puede encontrar en germen también en la obra de otros autores anteriores, especialmente en la de Gottlob Frege. En realidad, esta formulación general de la lógica de predicados estuvo motivada también por la necesidad de resolver dificultades que se presentaron en la lógica contemporánea, las llamadas *antinomias* que discutiremos luego. Independientemente de esta razón, es obvio que en demografía encontramos muchas veces, por caso, propiedades de individuos relacionadas con el territorio en que habitan, pero también propiedades de propiedades de tales individuos. Por ejemplo, decimos que "argentino" es una propiedad geográfica (que caracteriza al país de nacimiento) a diferencia de "matemático", que no es una propiedad geográfica sino profesional. Y luego predicamos propiedades de los argentinos.

Esta lógica tiene un fuerte poder expresivo, porque además de lo antedicho agrega nuevos principios lógicos a los tradicionales como los de no contradicción y de tercero excluido que ya hemos mencionado. Pero de este tema no nos ocuparemos en detalle. Digamos sencillamente que la lógica superior de predicados es realmente interesante porque desde el punto de vista ontológico establece una riquísima distinción de categorías.

La teoría clásica de conjuntos

Hay cierta dificultad para tratar con las lógicas superiores y por ello los matemáticos han emprendido otro camino para abordar sus problemas, característico de lo que se puede encontrar en los textos de matemática moderna, y que es la llamada *teoría de conjuntos*. Esta teoría, formulada por el matemático alemán Georg Cantor, terminó por ser algo así como un instrumento unificador básico del lenguaje de la matemática. No es poco mérito porque, si bien en la actualidad hay muchísimas ramas de la matemática, distintas entre sí, se advierte que la noción de *conjunto*, y las propiedades de los conjuntos y sus relaciones, se aplican a todas las investigaciones e intervienen en todos los discursos matemáticos.

Aunque nacido en San Petersburgo (Rusia), a Cantor (1845-1918) se lo suele considerar alemán porque su familia se trasladó a Alemania cuando sólo contaba once años, y en ese país publicó los trabajos que lo convirtieron en uno de los matemáticos más trascendentes del siglo XIX. Realizó sus estudios en Zurich y en Berlín. A partir de 1869 dictó clases en la Universidad de Halle, Sajonia,

y en 1872 fue formalmente designado profesor de la misma. Sus primeros trabajos lo condujeron al desarrollo de una teoría de los números irracionales (1872). Posteriormente, entre 1874 y 1884, Cantor expuso en diversas memorias su hoy célebre teoría de conjuntos, piedra basal de la matemática contemporánea y responsable en gran medida de la posterior investigación crítica de los fundamentos de la matemática y de la lógica. Sin embargo, matemáticos como Leopold Kronecker atacaron con vehemencia la teoría cantoriana, en particular en lo referido a los "números infinitos" que la misma introduce. (Se cree que la oposición del influyente Kronecker impidió que Cantor pudiese ocupar cargos de profesor en importantes universidades alemanas, tales como las de Berlín y Gotinga, a los que aspiraba.) En diversas etapas de su vida, Cantor padeció trastornos maníaco-depresivos, agravados, al parecer, por la reticencia de sus colegas a aceptar su teoría de conjuntos. Sólo en los últimos años del siglo XIX, en particular por la enérgica defensa que de ella hizo Hilbert, los méritos de la teoría comenzaron a ser admitidos por los matemáticos. Pero para Cantor este reconocimiento fue tardío, pues por entonces su dolencia se había agudizado. Murió en Halle, en un sanatorio para enfermos mentales.

En la teoría de Cantor se advierte una idea fundamental, en cierto modo anticipada por Aristóteles, según la cual podemos dividir las entidades a ser consideradas en dos tipos: los *individuos*, entidades básicas que pueblan el universo (Sócrates, una estrella, la ciudad de Buenos Aires) y los *conjuntos*. ¿Qué es un conjunto? Antes de responder la pregunta, debemos decir que en realidad ya encontramos esta idea en la tradición lógica clásica, pues en ella, cuando se habla de "propiedades", se habla también de la "extensión de las propiedades". Si tomamos una propiedad tal como "blanco", la extensión de la propiedad es algo así como una zona del universo ontológico en la que se encuentran todos los individuos de los que se puede predicar que son blancos: nubes, cantidades de leche, copos de nieve. Fuera de esta zona están aquellos individuos a los que no se les puede aplicar la propiedad "blanco", y que formarían una zona complementaria tal que entre las dos, la de los individuos blancos y la de los que no son blancos, constituirían el universo ontológico entero. En el lenguaje de los lógicos de la tradición aristotélica y medieval, la zona ontológica de los individuos a los cuales les podemos aplicar la propiedad se denomina la *extensión* de la propiedad, mientras que la propiedad misma es la *intensión*. (Se advierte al lector que la palabra "intensión" se entiende como un término técnico cuya ortografía se pone en correspondencia con la palabra "extensión".)

Entonces, ante cada individuo en particular, se nos presenta el problema de cómo reconocer si pertenece a la primera zona del universo o a la segunda. Cada propiedad parece automáticamente dar lugar a una extensión. Si embargo, una extensión no es un conjunto en la acepción de Cantor. Porque en la lógica clásica no se afirma que una extensión sea un nuevo objeto o entidad del universo; se trata meramente de una *clasificación* entre aquellos individuos a los que se les aplica la propiedad y aquellos a los que no se les aplica. Hay entida-

des blancas, por una parte, y entidades que no lo son. Por ello los lógicos del siglo XIX y gran parte de los actuales, en lugar de hablar de "extensión" prefieren hablar, justamente por ser el resultado de una clasificación, de *clases*. Podríamos decir: a cada propiedad o intensión le corresponde una clase, la de los objetos a los cuales la propiedad se le puede aplicar. Dicho de otro modo, entre extensión y clase no habría diferencias, pero estas nociones no tienen un carácter ontológico, es decir, no se las considera en sí mismas como entidades básicas, legítimas, que pueblan el universo.

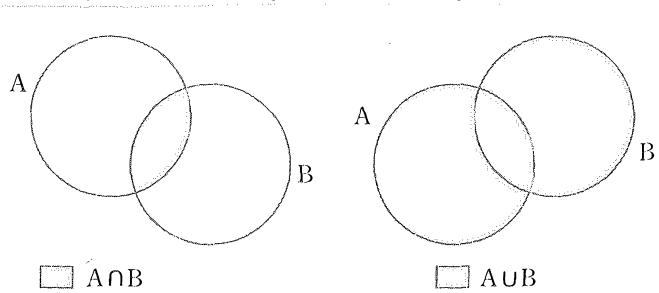
Pero Cantor no lo concibió así. Advirtió que los matemáticos usaban a veces la noción de "clase" como si ésta fuera un tipo particular de *objeto*, a pleno derecho, del mismo modo en que hablaban de los individuos y de sus propiedades o intensiones. Consideremos un ejemplo. En la definición de "circunferencia" se habla de la clase de los puntos de un plano que están a una determinada distancia de un punto dado llamado centro. Contemplado de este modo, la circunferencia es el resultado de una clasificación de los puntos del plano: a algunos de ellos se les puede aplicar la propiedad de estar a esa distancia del centro; a otros, los puntos interiores y los puntos exteriores a la figura, no se les puede aplicar. En este sentido, una circunferencia sería una clase o extensión; sin embargo, argumentó Cantor, el matemático no se conforma con pensar en la circunferencia como consecuencia de una mera clasificación de puntos. Por el contrario, la concibe como un *objeto* al que se le pueden trazar tangentes, dividir en dos o inscribirle ángulos. Más aún, elabora clases con las circunferencias; por ejemplo, cuando considera la clase de todas las circunferencias del plano que tienen un centro en común, o sea, la de todas las circunferencias concéntricas con una circunferencia dada. Cuando hace esto, el matemático nos ofrece una nueva clase, pero cuyos individuos son a su vez clases, las circunferencias; y también trata no sólo con clases de clases sino también con clases de clases de clases y así siguiendo.

Cantor advirtió con claridad que las clases podían ser concebidas como legítimos objetos o entidades, y en ello radica el germen de su noción de *conjunto*. El lector no puede dejar de advertir el parentesco y las diferencias que todo ello tiene con la lógica superior de predicados de las que hemos hablado anteriormente. La diferencia radica en que la lógica superior de predicados hace la distinción de categorías de una manera rígida, pues no existen propiedades "mixtas" que se puedan aplicar a la vez a individuos y a clases. En cambio, una vez admitido que los conjuntos pueden considerarse como objetos, no hay inconveniente en aceptar que existan clases formadas en parte por individuos y en parte por clases. Por ejemplo, en el caso de las entidades matemáticas, podemos imaginar una clase formada por puntos (individuos) y círculos (clases). Esta diferencia es fundamental porque automáticamente hace más rica la teoría de conjuntos y explica la preferencia que por ella tuvieron finalmente los matemáticos, después de una larga controversia y resistencia a las ideas originales de Cantor. Un conjunto sería efectivamente, en síntesis y dicho de una manera

totalmente informal, una serie de entidades elegidas con algún criterio (por ejemplo, el de los objetos blancos) o bien *arbitrariamente*. Nada se opone a que consideremos un conjunto formado por determinado punto geométrico, aquella zanahoria y el actual ministro de economía.

Recordemos, pues es bien conocido, que para afirmar que un elemento dado pertenece a un conjunto se emplea el símbolo de pertenencia "$\in$", y así resulta por caso $a \in A$: el elemento a pertenece al conjunto A. La pertenencia "$\in$" es una relación binaria entre un elemento del conjunto y el conjunto mismo. Cuando un conjunto se define arbitrariamente, se indican todos sus elementos entre llaves: $C = \{a, b, c, d\}$. Conviene destacar que el par no ordenado $\{x, x\}$ formado por x consigo mismo, tiene un único elemento x, y por ello se denomina conjunto *unitario* o *singular*. Se lo denota sencillamente $\{x\}$. Si quisiéramos referirnos al conjunto B de todos los objetos blancos, lo escribiríamos del siguiente modo: $B = \{x \mid x \text{ es blanco}\}$, que se lee "el conjunto de todos los x tales que x es blanco".

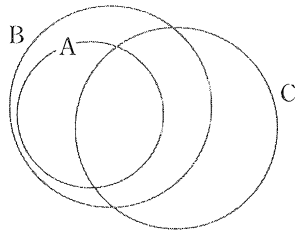
La teoría de conjuntos presenta una cantidad peculiar de operaciones. En primer lugar, como recordará el lector, al igual que en la lógica proposicional, en la cual se presentan operaciones con proposiciones, tendremos aquí operaciones entre clases[1]. Una de ellas es la *intersección* de dos conjuntos, nuevo conjunto formado exclusivamente por los elementos comunes a ambos. La intersección de la clase de las pinturas con la clase de los objetos valiosos es el conjunto de las pinturas que son valiosas. Quedan excluidas de la intersección las pinturas que no son objetos valiosos (por carecer de méritos estéticos) y los objetos valiosos que no son pinturas. Del mismo modo se puede definir la operación de *unión* entre dos conjuntos, conjunto que se obtiene al tomar todos los elementos pertenecientes a uno u otro, o a ambos a la vez, de manera que, en el ejemplo anterior, estaríamos en presencia de la clase formada por todas las pinturas, valiosas o no, y además por todos los objetos valiosos que no son pinturas. La intersección de dos conjuntos, A y B, se indica "$A \cap B$" y la unión de ambos "$A \cup B$", representados en grisado en las figuras.



1 Con las salvedades ya puntualizadas, emplearemos aquí *clase* y *conjunto* como sinónimos, en el sentido en que se utilizan estos términos en la teoría de Cantor.

Cabe aclarar que las operaciones de intersección y de unión se pueden realizar entre más de dos clases o conjuntos. La intersección de la clase de los poemas con la clase de los objetos valiosos y con la clase de los escritos de Borges es el conjunto de escritos poéticos de Borges que son valiosos. Su unión, en cambio, consta de todos los objetos valiosos, de todos los poemas y de todos los escritos de Borges.

Entre los conjuntos se pueden establecer diversas relaciones. Por ejemplo, un conjunto puede "ser parte de" o "estar incluido en" o "ser subconjunto de" otro si cumple la condición de que todo individuo que integra el primer conjunto como elemento es también elemento del segundo conjunto, aunque no forzosamente a la inversa: el conjunto de todos los mendocinos es parte o subconjunto del conjunto de los argentinos. Si hay elementos del segundo conjunto que no pertenecen al primero (como en el ejemplo anterior, pues hay argentinos que no son mendocinos) la inclusión se llama *propia*, y se indica "$A \subset B$". En la figura, A está propiamente incluido en B, pero no lo está en C. Tampoco B está incluido en C ni C en B. Utilizaremos el símbolo "$\subset$" exclusivamente para la inclusión propia, mientras que para la inclusión en general reservaremos el símbolo "$\subseteq$". Observemos que por ello se cumple siempre $A \subseteq A$ pero que sería falso afirmar $A \subset A$. Adviértase finalmente que, si $A \subset B$, como en el caso de la figura, entonces $A \cap B$ coincide con A.



Cabe señalar que el lenguaje ordinario puede llevar a confusiones, porque la relación entre un individuo y el conjunto al que pertenece se expresa con frecuencia por medio de la partícula *es* y entonces se dice: "Sócrates *es* griego". Con ello se quiere señalar que Sócrates (el individuo *s*) tiene la propiedad de ser griego, y que por consiguiente es un elemento del conjunto de los griegos (G). Se trata de la relación de pertenencia: $s \in G$. Pero cuando decimos genéricamente "el tucumano *es* mortal", lo que estamos afirmando es algo distinto: que el conjunto de los tucumanos (T) es *parte* del conjunto de los mortales (M); se trata de una relación de inclusión: $T \subset M$. La partícula *es* del lenguaje ordinario tiene una cierta polisemia, y es necesario distinguir el significado de *es* como pertenencia de un individuo a un conjunto y de *es* como relación de inclusión entre conjuntos.

Otra importante relación, un tanto obvia, es la de *identidad de conjuntos*. Si la lógica subyacente de un sistema axiomático es la teoría de conjuntos, si inclu-

ye la relación de identidad, como en el caso del sistema SAFO, resulta de los principios lógicos lo siguiente: "si dos conjuntos son idénticos, entonces deben tener los mismos elementos". Si no la incluye, entonces sería posible introducir la identidad de conjuntos mediante una definición: "si dos conjuntos están constituidos por los mismos elementos, decimos que los conjuntos son idénticos". Finalmente, una operación que hay que tener en cuenta aquí, análoga a la negación en la lógica proposicional, es la de *complementación*. Cuando consideramos una clase, es decir, una determinada extensión formada por ejemplo por objetos clasificados, atendiendo a que cumplen todos ellos una misma propiedad, la clase complementaria será la de los objetos que no la tienen. Si la propiedad fuese "hombre", el complemento sería el conjunto de todos los individuos que no son hombres, una clase bastante heterogénea porque estaría constituida por zapallos, montañas, conejos, botellas de vino, etcétera.

Si dos conjuntos A y B carecen de elementos en común se dice que son *disyuntos* y su intersección es el *conjunto vacío* o la *clase nula*, que se indica con el símbolo "$\varnothing$". Es decir: $A \cap B = \varnothing$. Se lo puede definir estableciendo una condición que ningún elemento puede cumplir, tal como $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$. Una curiosa propiedad de este conjunto es que él *está incluido en cualquier otro conjunto A*, es decir $\varnothing \subseteq A$, y es por tanto un subconjunto de A^2. Por último, digamos que se pueden agrupar los conjuntos en conjuntos de conjuntos; además de conjuntos de conjuntos habrá también *conjuntos de conjuntos de conjuntos*, y así siguiendo. Más adelante tendremos que mencionar el *conjunto potencia* de A, denominado P(A), formado por todas las *partes* (subconjuntos) de A.

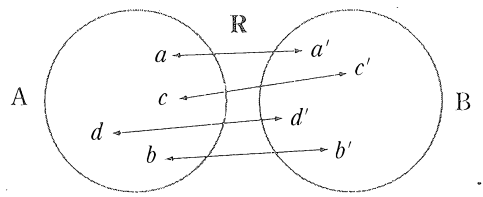
Señalábamos en el Capítulo 1 que hay habitualmente muchos malentendidos a propósito de la matemática, como cuando se la concibe como una suerte de "ciencia de la cantidad" o bien como el estudio de figuras espaciales. La teoría de conjuntos ofrece un buen ejemplo de que ello no es así, ya que dicha teoría trata con clases o conjuntos de individuos cualesquiera (no necesariamente números o figuras) y operaciones tales como la intersección y la unión de dos o más conjuntos, que no entrañan operaciones aritméticas ni enunciados geométricos.

Una relación entre los elementos de un conjunto y los elementos de otro es *biunívoca* si cumple las condiciones que expondremos de inmediato, luego de ofrecer un ejemplo previo. En una sociedad monogámica, se puede hacer co-

2 **Nota para el lector interesado.** Puede sorprender la extraña afirmación de que la clase nula o conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto A. Veamos por qué. Decir de un conjunto M que está incluido en otro, N, significa afirmar que, para cualquier x, si x es elemento de M entonces es también elemento de N. Utilizando los símbolos de la lógica elemental de predicados, esto se expresaría así: $(\forall x)(x \in M \supset x \in N)$. En consecuencia, mostrar que M *no está incluido* en N equivaldría a probar que hay un elemento m de M que no pertenece a N. Ahora bien, para mostrar que la clase nula está incluida en A, habría que tener en cuenta que, *de no ser así*, habría un elemento m de la clase nula que no pertenece a A. Pero es imposible que exista tal elemento, porque la clase nula no tiene elementos. No pudiendo ser falsa, la expresión "$\varnothing \subseteq A$" debe ser verdadera.

rresponder, por la relación de *matrimonio*, a cada esposa con su marido y cada marido con su esposa. Se trata de una relación biunívoca entre los elementos de la clase de las esposas y los de la clase de los maridos. En este caso, es habitual decir que el *dominio* de la relación está formado por la clase de todas las esposas y el *codominio* por la clase de todos los maridos. Ahora bien, en nuestro ejemplo, si Juana es una esposa y María es una esposa, y Juana es distinta de María, el esposo de María tiene que ser distinto del esposo de Juana y viceversa. Se dice entonces que una clase A y una clase B están en *correspondencia biunívoca* si existe una relación R biunívoca entre los elementos de una clase y los de la otra. Si R es la relación "esposa de", entonces si Juana es la esposa de Pedro, no puede ser la esposa de Juan, y, a la inversa, si Juana es la esposa de Pedro, éste no tendrá más esposa que ella. (Como el lector podrá comprobar, en los casos de bigamia no habría una correspondencia biunívoca, pero no estamos contemplando tales anomalías.)

La figura lo ilustra en el caso de A = {*a*, *b*, *c*, *d*} y B = {*a'*, *b'*, *c'*, *d'*}, conjuntos que están en correspondencia biunívoca porque existe una relación R biunívoca que se comporta como indican las flechas.



Esta noción de correspondencia biunívoca es muy importante, como quedará en claro más adelante. Se podría ilustrar diciendo que la clase B es una suerte de fotografía de la clase A, porque cada elemento de A queda representado como elemento de B y cada elemento de B representa algún elemento de A. Un determinado árbol real de un paisaje se corresponde con su réplica en la fotografía y a su vez la réplica en la fotografía del árbol se corresponde con el árbol real, y así en todos los casos. No sería concebible que allí donde en el paisaje hay un árbol la fotografía mostrase un ciervo ni que allí donde la fotografía mostrase un ciervo hubiese habido en el paisaje un árbol.

La teoría clásica de conjuntos introducida por Cantor se fue transformando paulatinamente, como ya señalamos, en un lenguaje básico para formular las ideas matemáticas. Más adelante lo pondremos en evidencia para comprender de qué modo la teoría sirvió para encarar desde otro ángulo el problema, ya presentado, de la consistencia de la geometría euclideana. Pero previamente debemos considerar un proceso histórico de singular importancia: la llamada "aritmetización de la matemática".

La aritmetización de la matemática 1: de la geometría euclideana a los números reales

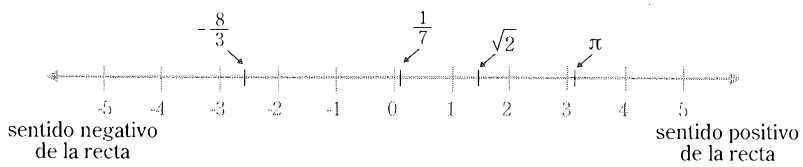
El surgimiento de la geometría analítica

Volvamos al problema de la consistencia de la geometría euclídea, acerca del cual el lector recordará que, según hemos establecido, se reduce el problema de la consistencia de las geometrías no euclideanas. Dicho de otro modo, si la geometría euclídea, entendida como sistema axiomático, fuese consistente, lo serán también las geometrías no euclideanas. Pero en la historia de la matemática se originó un proceso un tanto sorprendente, llamado "aritmetización de la matemática", por el cual el problema de la consistencia de la geometría euclidea quedó finalmente reducida al de la consistencia de los sistemas axiomáticos que se emplean para tratar con los números naturales. Veamos cómo sucedió ello.

El primer paso de este proceso fue dado en la primera mitad del siglo XVII por el notable filósofo, físico y matemático francés René Descartes (1596-1650), uno de los fundadores de la filosofía moderna, y también, en forma independiente, por Pierre de Fermat (1601-1665), otro destacado matemático de la misma nacionalidad. Ambos crearon la llamada *geometría analítica*. Nacido en La Haye (Touraine), ciudad que hoy lleva su nombre, Descartes estudió en un colegio jesuítico y luego se graduó en Derecho en la Universidad de Poitiers. Después de un intento de seguir la carrera militar y de servir en diversos ejércitos europeos, dedicó el resto de su vida a los problemas de la matemática y la filosofía, con incursiones en el terreno de la óptica. Realizó numerosos viajes por Europa, y residió en París desde 1625 a 1628, para trasladarse después a ciudades como Amsterdam, Utrecht y Leyden. En 1649 fue invitado a Estocolmo para dictar clases de filosofía a la reina Cristina de Suecia, pero allí contrajo una neumonía, a consecuencia de la cual falleció. Algunos de sus libros, como el *Discurso del método* (1637), *Meditaciones metafísicas* (1641) y *Los principios de la filosofía* (1644) son hoy considerados textos fundacionales de la filosofía moderna. Su novísima geometría analítica está expuesta en uno de los tres apéndices del *Discurso*, llamado precisamente *La geometría*. Por su parte, Fermat, quien realizó notables estudios sobre la teoría de la probabilidad y la teoría de números, concibió dicha geometría antes de que Descartes publicara su *Discurso*, pero no dio a conocer su trabajo sobre el tema: *Introducción a los*

lugares geométricos planos y sólidos. Se publicó en 1679, catorce años después de su muerte[1].

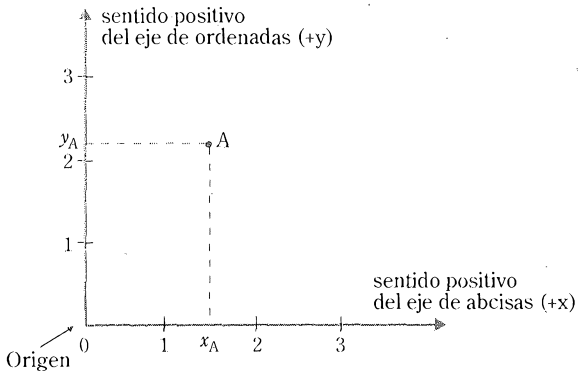
¿En qué consiste este descubrimiento de Descartes y Fermat? En la posibilidad de traducir, mediante un diccionario, todo cuanto se dice en términos de la geometría euclideana en términos de la aritmética de los números reales. Recordemos que el conjunto de los números reales es aquél formado por todos los números *racionales* (naturales, enteros y fraccionarios, positivos y negativos), y los *irracionales*, como $\sqrt{2}$ y π, que *no* pueden ser expresados como una fracción de números enteros. Números tales como 0, 2, -3, 1/7, -8/3, π o $\sqrt{2}$ son entonces números reales. Mostraremos ahora que, si consideramos una recta, a cada punto de la misma se le puede hacer corresponder un número real, y a la inversa, a cada número real le corresponderá un punto de la recta. Elegimos un punto arbitrario de la recta, que llamaremos *origen* y lo hacemos corresponder con el *cero*. Luego, en uno de los dos sentidos de la recta tomamos un mismo segmento a partir del origen, que vamos a llamar "01", porque lo consideraremos como unidad de medida, y hacemos lo propio en el sentido opuesto. Finalmente, fijamos lo que vamos a llamar un *sentido positivo* y un *sentido negativo* de la recta: el positivo del lado en que se tomó el segmento 01 y el negativo del lado opuesto, como indica la figura. En ésta hemos indicado algunos puntos de la recta y, valiéndonos de la correspondencia biunívoca que existe entre el conjunto de los puntos de la recta y el conjunto de los números reales, hemos señalado algunos números reales que se corresponden con determinados puntos de la recta[2].



1 Fermat es conocido en particular por haber enunciado el llamado "último teorema de Fermat", según el cual la ecuación $a^n + b^n = c^n$ no tiene solución para números enteros si n es mayor que 2, es decir, por ejemplo, que no se puede encontrar un conjunto de enteros a, b y c que cumplan $a^3 + b^3 = c^3$. En un ejemplar de su tratado de aritmética escribió: "He descubierto una demostración realmente extraordinaria de ello, que no cabe aquí por ser este margen demasiado estrecho". Muchos matemáticos posteriores trataron de demostrar el teorema o de encontrar un contraejemplo para probar que la afirmación es falsa. El teorema fue finalmente demostrado por el matemático británico Andrew Wiles, quien publicó sus conclusiones en la revista *Annals of Mathematics* en 1995. Hoy se cree que en realidad Fermat nunca pudo haberlo logrado con los recursos matemáticos del siglo XVII. Sobre este fascinante episodio de la historia de la matemática, el lector puede consultar *El último teorema de Fermat*, de Simon Singh, Bogotá, Norma, 1999.

2 La foliación de un libro se realiza por medio de números naturales (con excepción del cero) pero Jorge Luis Borges, en su relato "El libro de arena", nos presenta un libro en que el con-

Daremos ahora una cierta idea acerca de qué trata la geometría analítica, sin hacer en modo alguno un desarrollo sistemático del tema. Piénsese en determinado plano de la geometría euclideana, en el que el geómetra investiga las propiedades de las figuras, por ejemplo las de sus rectas o circunferencias. Para poder hacer la traducción propuesta por Descartes y Fermat, es habitual tomar en dicho plano dos rectas perpendiculares que vamos a llamar *ejes de coordenadas*. Al punto de intersección de ambas lo denominaremos *origen* de las coordenadas x e y (que representan los puntos de dichas rectas), y en uno de los dos sentidos del primer eje, y en uno de los dos sentidos del otro, tomaremos (aunque no es forzoso) un mismo segmento a partir del origen, que vamos a llamar "01", porque lo consideraremos como unidad de medida. Teniendo el origen de coordenadas, los dos ejes y la unidad de medida en ambos, fijaremos lo que vamos a llamar un *sentido positivo* y un sentido *negativo* en cada una de las rectas: el positivo del lado en que se tomó el segmento 01 y el negativo del otro lado, como indica la figura. Los puntos de cada eje, recordemos, pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los números reales.



Consideremos ahora un punto cualquiera A del plano; y tracemos desde A perpendiculares a los ejes: obtendremos x_A e y_A, con lo cual se forma un rectángulo cuyos vértices se indican en la figura. La medida del segmento comprendido

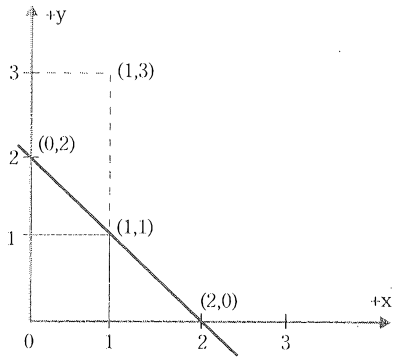
junto (infinito) de páginas que integran el libro ha sido foliado con el conjunto (infinito) de los números reales positivos o bien (no nos resulta claro) de los racionales positivos, igualmente infinitos: "Apoyé la mano izquierda sobre la portada y abrí [el libro] con el dedo pulgar casi pegado al índice. Todo fue inútil: siempre se interponían varias hojas entre la portada y la mano. Era como si brotaran del libro". No es difícil concluir que los granos de arena del relato conforman una metáfora de los puntos de la recta. Véase, por ejemplo, Boido, G., "Una lectura de Borges desde la ciencia", en Leonor Fleming (ed.), *El Universo de Borges*, Buenos Aires, Secretaría de Cultura de la Nación, 1999, pp. 83-109.

entre el origen y x_A se llama la *abscisa* de A y la del segmento comprendido entre el origen e y_A se llama la *ordenada* de A. En ambos casos, se trata de números reales. (Recuérdese que estas medidas tienen como unidad de longitud la del segmento 01.) Tanto la abscisa como la ordenada se llaman las *coordenadas* del punto A, y, como es fácil advertir, a cada punto del plano le corresponde un par ordenado de números reales, sus coordenadas. A la inversa, a todo par ordenado de números reales se les puede hacer corresponder un punto del plano, del cual dichos números serán sus coordenadas. Ello establece una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los pares ordenados de números reales: a cada punto del plano le corresponde un *único* par ordenado de números reales y, a la vez, a cada par ordenado de números reales le corresponde un *único* punto del plano. Como afirmábamos anteriormente a propósito de la teoría de conjuntos, tenemos por una parte el conjunto de los puntos de un plano y por otra el conjunto de pares ordenados de los números reales, y lo que acabamos de señalar es que hay una relación R, biunívoca, que permite establecer una correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos. Conviene recordar que, en matemática, dados dos números *a* y *b*, podemos formar con ellos un conjunto $\{a, b\}$ en el que no importa el orden en el que se los escriba; $\{a, b\}$ es el mismo conjunto que $\{b, a\}$. En nuestro caso, por el contrario, entre *a* y *b* se establece una relación de orden, lo cual se indica cómo (a, b), y significa que los *pares ordenados de números* (a, b) y (b, a) son distintos, supuesto que *a* no es idéntico a *b*. Por ejemplo, el par (5,1) y el par (1,5) no son el *mismo* par.

A partir de la mencionada relación biunívoca R, vamos a construir un modelo relativo que traduce la geometría euclídea a la aritmética de los números reales, para lo cual hay que establecer, como ya sabemos, un diccionario. Pero no lo vamos a describir en detalle, pues bastará con señalar algunas de las correspondencias que forman parte de él. Por ejemplo, en la columna de la izquierda tendremos "punto (euclideano)", que se corresponde, en la columna de la derecha, con "par ordenado de números reales". A su vez, "recta" se traduce como una ecuación de primer grado con dos incógnitas, cuya forma general es $ax + by + c = 0$, donde *a*, *b* y *c* son números reales[3]. Esto significa que si un punto dado pertenece a la recta, entonces las coordenadas del punto satisfacen dicha ecuación. Por ejemplo, si la ecuación fuese $x + y - 2 = 0$, el punto que se corresponde con las coordenadas (1,1) formaría parte de la recta simbolizada por

3 Conviene aclarar que ecuaciones tales como $2x + 2y - 4 = 0$, $x + y - 2 = 0$, $5x + 5y - 10 = 0$, que resultan de multiplicar o dividir los coeficientes *a*, *b* y *c* de una ecuación por un mismo número, son satisfechas por los mismo pares ordenados de números reales, por ejemplo (1, 1), y de allí que se las considere como la *misma* ecuación. Éste es el sentido en que debe admitirse que hay una correspondencia biunívoca entre el conjunto de las rectas del plano y "las ecuaciones de primer grado".

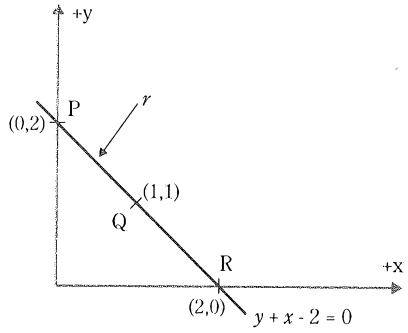
la ecuación dada, pues 1 + 1 - 2 = 0. El lector puede comprobar que puntos tales como los que se corresponden con las coordenadas (0,2), (2,0) o bien (0,25, 1,75) también forman parte de la recta, pero no ocurre lo mismo con (1,3), pues 1 + 3 - 2 no es igual a 0.



Con este diccionario, se establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta, considerada por el geómetra euclideano, con un conjunto determinado de pares ordenados de números reales. Toda recta del plano puede ser traducida a una ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, otorgando valores convenientes a los números reales a, b y c, y a la inversa: dada una ecuación $ax + by + c = 0$, con valores de a, b y c previamente fijados, ella se corresponderá con una recta del plano. Y lo mismo sucedería con otras curvas del plano euclídeo; por ejemplo, una circunferencia con centro en el origen y radio r se correspondería con la ecuación de segundo grado $x^2 + y^2 = r^2$. De este modo, algunas de las figuras más conspicuas de la geometría (rectas, circunferencias, parábolas, elipses, hipérbolas, etc.) se corresponden con ecuaciones importantes del álgebra de los números reales. La traducción permite que todo aquello que pueda decirse en el lenguaje geométrico pueda decirse también en el lenguaje algebraico de los números reales, y así nació, con Descartes y Fermat, la geometría analítica, o sea una geometría que en lo esencial expone todas las propiedades de figuras geométricas de una manera algebraica[4]. Y entonces, si suponemos que el lenguaje algebraico de los números reales está expresado por un sistema axiomático formal, asunto que analizaremos más adelante, lo que habremos hecho es una *reducción* del lenguaje de la geometría euclídea al lenguaje algebraico de los números reales.

4 La traducción opera también en sentido inverso, es decir que cuanto puede decirse sobre ecuaciones con números reales puede ser dicho también en términos de figuras geométricas. Por ejemplo, la ecuación $y - x^2 = 0$ se corresponde con una parábola.

De acuerdo con lo señalado, insistimos, todo cuanto se dice en un sistema axiomático de la geometría euclídea por medio de cuasiproposiciones queda traducido a cuasiproposiciones de un sistema axiomático apto para expresar el álgebra de los números reales. Si pudiésemos mostrar que los axiomas de la geometría euclídea se transforman en teoremas aritméticos de un sistema axiomático para los números reales, desde un punto de vista formal estaríamos en presencia de un modelo relativo de aquella geometría. Lo sorprendente es que ello es así, y que por tanto *todo teorema de la geometría euclideana se corresponde con un teorema de la aritmética de los números reales.* Consideremos un ejemplo. La afirmación "por dos puntos pasa una recta y solo una" (axiomas de enlace 1 y 2 de Hilbert), se traduciría por: "dado dos pares ordenados distintos de números reales hay una única ecuación de primer grado de la cual los dos pares son soluciones". En la figura siguiente, por caso, los puntos de la recta r podrían ser P y Q, que se corresponden con los pares de números reales (0,2) y (1,1). Estos pares son soluciones de la ecuación ya mencionada $y + x - 2 = 0$, porque $2 + 0 - 2$ es igual a cero y $1 + 1 - 2$ también es igual a cero. En la recta r hallamos también el punto R, que se corresponde con el par de números reales (2,0) y que también satisface la ecuación pues $0 + 2 - 2 = 0$.



Aunque sólo hemos elegido a modo de ejemplo el axioma euclídeo "por dos puntos pasa una recta y solo una", con suficiente paciencia es posible mostrar que todo ello se puede lograr para los demás axiomas de Euclides-Hilbert, es decir que cada uno de éstos admite una traducción válida al ámbito de los números reales. Si esto es así, resultaría lo siguiente: si la aritmética de los números reales, expresada como sistema axiomático formal, es consistente, la geometría euclídea del plano debe necesariamente también ser consistente. ¿Pero es consistente la aritmética de los números reales? ¿Cómo sabemos que ella no lleva a contradicciones? En las páginas que siguen nos ocuparemos de este importante punto.

Una digresión sobre números

Comencemos por narrar una historia acerca de la noción de "número" que tiene el mayor interés filosófico. Hoy resulta una trivialidad decir que 0, 2, –3, 1/7, –3/8 o π *son números* (reales), pero sucede que muchas veces, en el pasado, los matemáticos y filósofos no estuvieron dispuestos a admitir que *fuesen números* los negativos, los fraccionarios o los irracionales. Se disponía de una cierta aritmética, suficiente para realizar algunas operaciones, pero otras no podían ser realizadas. Por ejemplo, si consideramos sólo la aritmética de los números naturales, es posible restar 3 de 7 (y el resultado es 4) pero no 7 de 3. Entonces, en cierto momento, se concibieron los números *enteros negativos*, para poder decir que restar 7 de 3 da como resultado –4, o sea: 3 – 7 = –4. Tenemos ahora una nueva aritmética, la de los números *enteros*, que resulta de ampliar la de los naturales con el agregado de la de los enteros negativos, y en la cual habrá números tales como –34, –2, 0, 1, 6 y 128. Curiosamente, el nombre con el que se designó a estos nuevos números muestra una cierta "inquina" hacia ellos, pues *negativo* indica una predisposición en contra de su aceptación: se los acepta a regañadientes. Pero aun cuando admitamos el *status* de "número" para los enteros, a pleno derecho, sigue habiendo operaciones que en ciertos casos no pueden ser realizadas. El número 12 (un entero) dividido por –3 (otro entero) da como resultado el entero –4. Pero en la aritmética de los números enteros carece de sentido preguntarse cuál sería el resultado de haber dividido 3 por 5. Ahora hay que admitir que el resultado es un nuevo tipo de número, 3/5, una fracción o *quebrado*, nombre que tampoco expresa una buena disposición hacia tales números. Al ampliar el campo de números ya aceptados con los nuevos números quebrados (positivos y negativos) tenemos ahora el conjunto de los números *racionales*, tales como –4, –3/5, 0, 2/3 y 237. Con ellos no sólo es posible restar dos números cualesquiera sino también dividirlos (salvo que el divisor sea *cero*.)

¿Se agota con los racionales el campo de los números concebibles? Si el lector recuerda lo que afirmábamos en el Capítulo 2 acerca de los descubrimientos de Pitágoras y su escuela, advertirá de inmediato que la respuesta es negativa. Si un matemático quiere expresar la medida de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide *uno*, se encontrará con que dicha medida no puede ser ningún número racional. Tendrá que introducir un nuevo tipo de números, los *irracionales*, y decir que la medida buscada es $\sqrt{2}$, porque, según el teorema de Pitágoras, $1^2 + 1^2 = 2$ deberá ser el cuadrado de dicho número: $(\sqrt{2})^2 = 2$. En la historia de la matemática la aceptación de los números irracionales fue muy resistida, y de allí el nombre que recibieron, como si fuesen "inaccesibles para la razón", lo cual quedaría reservado para los racionales. En cierto momento se los llamó *números sordos* o *mudos*. Al ser aceptados finalmente estos nuevos números, el campo de la aritmética se amplió y aceptó en su seno a los números *reales*, el conjunto de los racionales y los irracionales. Un descubrimiento

importante en la historia de la matemática fue el hallazgo de que la medida de la longitud de una circunferencia de diámetro *uno* es un número irracional, el famoso número *pi* (π).

A esta altura el lector puede preguntarse: ¿es posible realizar con números reales *cualquier* operación aritmética tal que el resultado sea un número real? Pues no. En particular, no puede ser un número real el resultado de extraer la raíz cuadrada de un número negativo. Por ejemplo, la raíz cuadrada de –1 debería ser un número tal que su cuadrado fuese –1, pero ocurre el cuadrado de todo número real, positivo o negativo, es siempre *positivo*. (Como dicen los escolares: "menos por menos da más".) Hubo entonces que introducir nuevamente otro tipo de números, como $\sqrt{-1}$ (designado por los matemáticos con la letra *i*), los llamados *imaginarios*. En este caso, $i^2 = -1$. Aquí constatamos nuevamente la reticencia histórica de los matemáticos a admitir la "realidad" de estos nuevos números imaginarios, que para el matemático actual son tan "reales" como los naturales o las fracciones. Ahora tenemos, finalmente, el campo de los *números complejos*, conformado por los reales y los imaginarios[5].

En rigor, cada uno de los conjuntos de números que acabamos de mencionar (naturales, enteros, racionales, reales, complejos) están expresados por sus correspondientes sistemas axiomáticos formales, acerca de los cuales analizaremos más adelante si tienen o no modelos, es decir, si son consistentes o no lo son. Pero pospondremos por el momento esta discusión, y volveremos a analizar un hecho histórico de gran importancia, cual fue la posición pitagórica a propósito de la relación que existe entre matemática y realidad. La describimos en el Capítulo 2 señalando que, para Pitágoras y sus adeptos, existe cierto isomorfismo entre las estructuras de la matemática, que habitarían en el mundo puro de las formas ideales, y las estructuras un tanto groseras e imperfectas que caracterizan al mundo de lo concreto. Tenemos ahora nuevos elementos para analizar esta pretensión.

Regreso a Pitágoras

Ampliaremos ahora algunas de las concepciones pitagóricas que ya hemos adelantado anteriormente. Pitágoras parece pensar, en primer lugar, que el espacio real y las cosas que él ocupa están compuestas por puntos, pero no en el sentido en que utilizará luego Euclides la palabra "punto": aquello "que no tiene partes", es decir que carece de extensión. Por el contrario, los pitagóricos parecen no estar en condiciones de imaginar algo así como el "punto inexten-

5 Cabe señalar que los números complejos se expresan en su forma más general como $a + bi$, donde a y b son números reales; a es real, mientas que bi es imaginario. Este tipo de número satisface todas las necesidades de la aritmética habitualmente empleada.

so" euclideano y suponen que el punto tiene extensión, pero esta extensión ya no comprende más puntos: habríamos llegado a una suerte de "extensión mínima". Advierta el lector que esta suposición tiene, en el pensamiento de Pitágoras, un cierto carácter atomístico. Admitido ello, debemos pensar que los puntos son algo así como componentes últimos de la realidad, unidos los unos a los otros. Pero imaginemos ahora una recta: dado un punto (extenso) cualquiera de la misma, habrá en ella un punto contiguo a la izquierda y otro punto contiguo a la derecha. En particular, un segmento AB estaría compuesto por una enorme cantidad *finita* de puntos que se extienden desde el punto A hasta el punto B.

Señalábamos anteriormente que a Pitágoras se le atribuye la frase "los números constituyen la esencia del mundo", una expresión que no carece de ambigüedad pues podría significar que el mundo se puede explicar con el recurso a los números o bien que los números conforman las piezas últimas con las que está edificado el universo. Si admitimos la segunda interpretación, Pitágoras parece querer decir que, cuando hablamos de números, en realidad hacemos referencia a una colección de puntos extensos. Por ejemplo, el número 3 sería sencillamente una colección de tres puntos discretamente separados. Pero toda esta concepción se derrumbó ante la prueba pitagórica, analizada en el Capítulo 2, de que la diagonal de un cuadrado y su lado son inconmensurables, es decir, que no es posible encontrar una unidad de medida común entre ambos, lo cual hubiese sido posible si dichas longitudes hubiesen estado conformadas por conjuntos finitos de puntos extensos. Hoy diríamos sencillamente que la diagonal de un cuadrado de lado *uno* mide $\sqrt{2}$, un número irracional, pero sería una afirmación anacrónica si la aplicamos al momento histórico que estamos considerando. No existían los "números irracionales" en tiempos de Pitágoras. Fueron los matemáticos indios quienes trataron libremente con magnitudes inconmensurables y admitieron la existencia de números irracionales, abriendo así el camino para la aceptación posterior, a pleno derecho, de los números reales. (Todo ello se lo puede encontrar en la obra del notable matemático Brahmagupta, quien vivió en la primera mitad del siglo VII.) Pero lo curioso que queremos destacar aquí es que la traducción de Descartes y Fermat supuso que la geometría euclideana es reducible a números reales, lo cual puede querer decir dos cosas: (a) que los teoremas de la geometría euclídea se reducen a teoremas sobre números reales, pero también, (b) que las nociones geométricas, a la manera pitagórica, son traducibles a entidades constituidas por números reales (por ejemplo, pares ordenados de ellos). Obviamente, hablamos aquí de ciertos números, los reales, que Pitágoras desconocía pues sólo trataba con naturales (con exclusión del cero) y quebrados positivos.

Recordamos al lector que estamos comentando un proceso histórico en parte del cual el problema de la consistencia de la geometría no euclideana se redujo al problema de la consistencia de la geometría euclideana, utilizando el método de hallar modelos relativos; en particular, utilizamos el modelo de Klein

para ejemplificar cómo puede hacerse tal cosa. A su vez, nuestra discusión acerca de la creación por Descartes y Fermat de la geometría analítica muestra en principio la posibilidad de reducir el problema de la consistencia de la geometría euclídea al problema de la consistencia de la teoría de los números reales, expresada formalmente por un sistema axiomático. Por consiguiente, es necesario preguntarse si la teoría de los números reales es consistente, porque de ello dependerá la suerte de la geometría, tanto de la euclídea como de las no euclideanas, al margen de que la cuestión tenga en sí misma crucial importancia para la aritmética. La respuesta a dicha pregunta forma parte del proceso histórico complicado y fascinante que hemos llamado "aritmetización de la matemática", al cabo del cual se reconoció no sólo que las geometrías no euclideanas se reducen a la euclideana y ésta a la aritmética de los números reales, sino que ésta es reducible a su vez a la de los racionales, y ésta, por su parte, a la de los enteros, y finalmente esta última a la de los naturales. Por tanto, el problema de la consistencia de las geometrías y de la aritmética de los números reales, racionales y enteros, acaba por reducirse al problema de determinar si la aritmética de los números naturales es consistente. Analizaremos el punto con cierto detalle en el próximo capítulo.

La aritmetización de la matemática 2: de los números reales a los naturales

Definiciones por abstracción y relaciones de equivalencia

Ya hemos señalado que la extensión gradual del campo numérico admitido por los matemáticos, desde los venerables números naturales empleados "para contar" hasta los números reales, se cumplió sucesivamente en distintas etapas históricas. Pero a partir de fines del siglo XIX los lógicos y matemáticos se han ocupado del problema de cómo reducir la teoría de cada clase de número (real, racional, entero) a la teoría de los números naturales; y ello se ha finalmente conseguido. Es necesario aclarar que en los textos corrientes de matemática no se habla de los números naturales, enteros, racionales o reales expresados por medio de sistemas axiomáticos formales, y que incluso el matemático trata con los números como si fueran "ciertas cosas", de tipo platónico, o bien entidades un tanto *sui generis*[1]. Pero si queremos proceder rigurosamente en este punto debemos contar con tales sistemas axiomáticos o *formalismos* (como se los llama habitualmente) para cada clase de números[2]. Esos formalismos existen, y por ello podemos hablar entonces de *modelos relativos*. La reducción de los números reales a los números racionales consiste entonces en hallar un modelo relativo que lleva el formalismo de los números reales al formalismo de los números racionales (es decir que el primer sistema se interpreta *sobre* el segundo), y lo mismo diríamos en el caso de la reducción de los racionales a los enteros y de los enteros a los naturales. Este notable proceso, que forma parte de la aritmetización de la matemática, conduce al ya señalado sorprendente resultado final de que el problema de la consistencia del formalismo

1 En el caso de las entidades geométricas euclideanas, a veces se las identifica con *figuras* o *dibujos*, pero ello es incorrecto, pues los trazos con los que representa una recta o un ángulo en un libro o un pizarrón son solamente *interpretaciones físicas* de la geometría euclídea. Desde luego, ello no significa negar el gran valor didáctico que tiene este recurso gráfico.

2 Los matemáticos suelen hablar indistintamente, por ejemplo, de "teoría de los números naturales", "axiomática de los números naturales", "formalismo de los números naturales" y expresiones similares. Lo mismo hacen en el caso de otros números. Pero en todos los casos lo que se menciona es el sistema axiomático formal que permite caracterizar rigurosamente a tales números, con su lógica subyacente, sus términos específicos, sus axiomas, etc.

de los números reales se reduce al problema de la consistencia del formalismo de los números naturales. Dicho resultado fue obra de diversos matemáticos, entre los cuales podemos citar particularmente a un alumno de Gauss, el alemán Julius Richard Dedekind (1831-1916), a quien se deben importantes aportes en el campo de la fundamentación de la matemática. Es necesario aclarar que estas reducciones obligan al uso de una lógica subyacente bastante "fuerte", que para el caso es la teoría cantoriana de conjuntos. Daremos más adelante una idea no formalizada y un tanto vaga acerca de cómo se pueden reducir los números enteros a los números naturales y después indicaremos sin mayores detalles cómo se operó en las otras dos etapas: la reducción de los racionales a los enteros y la de los reales a los racionales.

En primer lugar, es necesario hacer una digresión sobre un método de definición un tanto curioso, a la vez que útil, que fue apareciendo poco a poco en la historia de la matemática con el nombre de *definición por abstracción*. ¿En que consiste este método? Aclaremos que tiene una versión que pudiéramos llamar clásica, una manera un tanto informal de trabajar metodológicamente en el espíritu de estas definiciones, y otra posterior, la reconstrucción que de ellas hizo Bertrand Russell. Comentaremos seguidamente de qué manera se emplea este tipo de definiciones (por ahora en su versión clásica) para introducir la noción de *dirección de una recta*, la noción de *forma de una figura geométrica* y la noción de *superficie de una figura geométrica*, todo ello en el ámbito de la geometría euclídea plana.

Cuando se tiene una recta, se la puede recorrer de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, y hablamos entonces de dos *sentidos* de la recta. Pero si se prescinde del sentido, podemos hablar de *dirección* de una recta para indicar lo que tiene de idéntico o en común con las rectas paralelas a ella. Por caso, decimos que la avenida Corrientes y la calle Sarmiento, en el centro de Buenos Aires, tienen igual dirección aunque tengan diferente sentido (de circulación de vehículos). Siendo así, la pregunta es: ¿qué es la *dirección* de una recta? A veces un concepto no está realmente designando algo determinado, sino que admite lo que se llama un *uso contextual*, y entonces podríamos conformarnos con la siguiente aclaración: "decir que una recta tiene la misma dirección que otra recta, es equivalente a decir que son paralelas". (Recordamos al lector que nuestra acepción de "paralelismo" admite el caso en que las rectas sean coincidentes, es decir que toda recta es paralela a sí misma.) Con ello, aparentemente, quedaría eliminado el problema, pero si pretendemos ir más allá y aceptar que hay *algo* que es la dirección de una recta, nos encontramos nuevamente con la embarazosa pregunta anterior: ¿qué es la dirección de una recta?

Ahora bien, aquí es donde debemos comenzar por analizar la noción de *paralelismo entre rectas* como relación entre ellas. Dicha relación, *paralela a*, goza de tres propiedades:

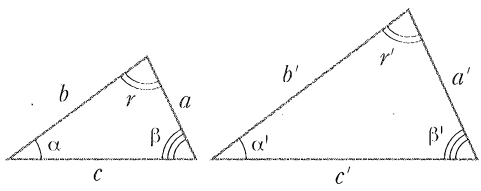
1. **reflexividad:** *toda recta es paralela a sí misma*

2. **simetría:** *si una recta es paralela a otra, ésta es paralela a la primera*

3. **transitividad:** *si una recta es paralela a otra y ésta lo es a una tercera, la primera es paralela a la tercera*

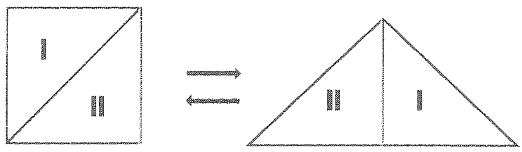
En matemática, de una relación que tiene estas tres propiedades (es decir, es reflexiva, simétrica y transitiva) se dice que es una *relación de equivalencia*. Las entidades relacionadas de este modo se dicen *equivalentes*. El lector puede comprobar que la relación *igual a*, aplicada por ejemplo al caso de números, es una relación de equivalencia. Pero no todas las relaciones son de esta clase. Por caso, la relación *hermano de* no cumple la condición de reflexividad ni de la de transitividad. Nadie es hermano de sí mismo. Y si alguien es hermano de otro y éste lo es de un tercero, no necesariamente el primero y el tercero han de ser hermanos: podría tratarse de la misma persona, que no sería hermano de sí mismo. Pero si tenemos, como en el caso de las rectas paralelas, una relación de equivalencia que las vincula (el *paralelismo*), es porque ellas tienen "algo idéntico" o "algo en común". La razón por la cual pensamos que detrás de una relación de equivalencia se esconde algo idéntico o en común entre los elementos relacionados radica en la semejanza que la relación de equivalencia tiene con la relación de *identidad*, por ser ambas reflexivas, simétricas y transitivas. Por tanto podríamos dar la siguiente definición: "la dirección de una recta es lo que tiene en común con todas las demás rectas a la que es paralela". Una forma de definición en la que se introduce un concepto diciendo "qué es lo que tiene en común" un objeto con todos aquellos vinculados con él por una dada relación de equivalencia, se llama *definición por abstracción* (en sentido clásico). La abstracción consiste en prescindir de la relación de equivalencia y quedarse con "lo de idéntico" que tienen los objetos por estar relacionados, precisamente, a través de la relación en cuestión.

En matemática, el procedimiento de definir por abstracción se ha utilizado también para tratar con otras relaciones de equivalencia, por ejemplo la de *semejanza*. En la figura lo hemos ilustramos en el caso de dos triángulos, cuyos ángulos son respectivamente iguales ($\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$) pero sus lados (aquellos que están representados por la misma letra) son proporcionales, es decir: $a'/a = b'/b = c'/c$. Por ejemplo, si a'/a fuese igual a 2, cada lado del segundo triángulo sería el doble del correspondiente lado del primero. En este caso, se dice que los dos triángulos son *semejantes*, o bien que están relacionados por la relación *de semejanza*, es decir, *semejante a*. En un mapa o plano la relación que existe entre lo representado y su representación es precisamente una relación de semejanza, donde la proporcionalidad se denomina generalmente *escala* del mapa o del plano.



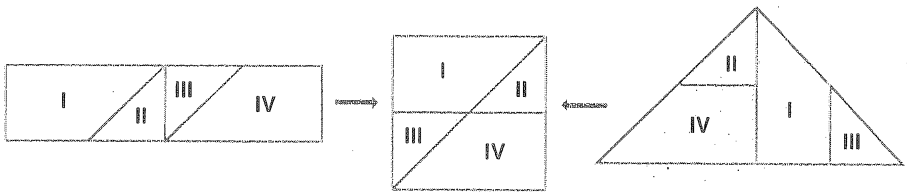
La semejanza de triángulos es claramente una relación de equivalencia, pues todo triángulo es semejante a sí mismo (reflexividad); y si un triángulo es semejante a otro, éste es semejante al primero (simetría); finalmente, si un triángulo es semejante a otro y éste lo es a un tercero, el primero y el tercero son semejantes (transitividad). Esta última propiedad debe ser demostrada, lo cual dejamos a cargo del lector. Todo lo cual es válido también para otras figuras geométricas poligonales, tales como rectángulos o pentágonos, mas no para aquellas limitadas por curvas, como ocurre con las elipses[3]. (Advierta el lector, por ejemplo, que todos los cuadrados son semejantes.) Según el método de definición por abstracción, las figuras semejantes deben tener "algo en común", "algo idéntico". En el caso de las figuras semejantes es la *forma*, y así sería posible definir la forma de una figura diciendo que es "lo que tiene de idéntico" o "en común" con todas las que son semejantes a ella. Ello es válido para toda figura poligonal, trátese de triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, etcétera.

Otro ejemplo de relación de equivalencia es el de *equidescomposición* de una figura, que permite definir por abstracción su *superficie*. Una figura será *equidescomponible* con otra si es posible descomponer la primera en un número finito de partes tales que, rearmadas al modo de un rompecabezas, originan la segunda figura. Por ejemplo, podemos tomar un cuadrado, dividirlo por una de sus diagonales y colocar, contiguos, los dos triángulos que se obtienen, I y II, de modo que se obtenga un nuevo triángulo: el cuadrado y el nuevo triángulo son equidescomponibles. (Véase la figura.)



3 Sencillamente porque en estos casos no es posible hablar de "lados" o "ángulos" de las figuras, y es necesario utilizar otros criterios, más complejos, para definir la semejanza entre ellas. Por caso, dos elipses son semejantes si tienen la misma excentricidad, factor que mide el grado de "achatamiento" de la elipse. La circunferencia es un caso particular de elipse "no achatada", y su excentricidad es *cero*.

Es sencillo comprobar que esta relación de equidescomposición entre figuras poligonales es una relación de equivalencia, porque toda figura es equidescomponible consigo mismo, y si una figura es equidescomponible con otra, ésta lo es con la primera, como se advierte en nuestro ejemplo del cuadrado y el triángulo. La transitividad, por su parte, exige que la primera y la tercera figuras puedan ser descompuestas de tal modo que, al ser reunidas de manera conveniente, den como resultado la segunda figura.



El lector puede comprobarlo en el caso de un rectángulo, que se puede descomponer en cuatro partes, I, II, III y IV, de manera tal que, al ser reagrupadas, se convierte en un cuadrado; y el de un triángulo que, al ser reagrupadas sus partes, I, II, III y IV, se convierte en el mismo cuadrado. El rectángulo es equidescomponible con el cuadrado, y éste lo es con el triángulo y, por consiguiente, el rectángulo es equidescomponible con el triángulo: la transitividad se cumple. (Véase la figura.) Siendo la equidescomposición una relación de equivalencia, podemos preguntarnos qué tienen "en común" o "de idéntico" las figuras equidescomponibles, y la respuesta es: la *superficie*. Lo cual llevaría a una definición por abstracción como la siguiente: la superficie de una figura poligonal es "lo que tiene de idéntico" o "en común" con todas las figuras con las cuales es equidescomponible. La extensión de este concepto para figuras con curvatura implica dificultades en las que no entraremos en detalle.

Es evidente que esta manera de definir por abstracción es útil, como lo muestran los conceptos que de alguna manera hemos introducido, pero desde un punto de vista filosófico no resulta claro cómo se la justifica. Analicemos por ejemplo el caso de las rectas paralelas, mencionado anteriormente, y la definición por abstracción "la dirección de una recta es lo que tiene en común con todas las demás rectas a la que es paralela". Para ilustrar el problema que se nos presenta, recurramos a la siguiente metáfora teológica. Supongamos la existencia de ángeles que aman las rectas y que para cada recta existe un ángel que la ama pero también ama a todas las rectas paralelas a ella. Siendo así, las rectas que son paralelas a una recta dada son amadas por un mismo ángel, y las que en cambio no son paralelas a aquélla serán amadas por otros ángeles. Si definimos la dirección de una recta como lo que tiene en común con todas aquéllas que son paralelas a ella, nos vemos tentados nuevamente de preguntarnos, desde un punto de vista ontológico: ¿pero *qué es* lo que tiene esa recta en

común con sus paralelas? O bien: *¿qué es* la dirección de la recta? Y la respuesta podría ser: el ángel que la ama, una respuesta a todas luces insatisfactoria. Introducir entidades tales como ángeles para estos propósitos es un tanto aventurado. Habrá por tanto que emprender otro camino para responder dichas preguntas.

Las clases de equivalencia y la aritmetización de la matemática

¿Qué hacer entonces con las definiciones por abstracción? Una posible respuesta fue dada por Bertrand Russell, quien fue más allá de la versión clásica de tales definiciones e hizo una reconstrucción que podemos llamar *moderna* de las mismas. Si se consideran las rectas paralelas a una dada, podemos suponer que todas ellas conforman un conjunto llamado *haz de paralelas*, y entonces admitir, en términos conjuntísticos, la siguiente definición: *la dirección de una recta es el haz de paralelas al cual pertenece la recta dada*. Esto nos permite introducir una importante noción, la de *clase de equivalencia*. Ante una relación de equivalencia y un conjunto de elementos, a cada elemento del conjunto le podemos asociar otro conjunto: el formado por los elementos que son *equivalentes* a él (es decir, que todos ellos están vinculados por la relación de equivalencia dada). Este segundo conjunto será la *clase de equivalencia* del elemento considerado. Y diremos entonces que la *dirección de una recta* es la clase de equivalencia a la que pertenece esa recta con respecto a la relación de equivalencia *paralelismo*, es decir, *paralela a*. De acuerdo con ello, la *forma* de una figura es la clase de equivalencia a la que pertenece la figura respecto de la relación de *semejanza*; y la *superficie* de una figura es la clase de equivalencia a la que pertenece la figura respecto de la relación de *equidescomposición*.

Admitido ello, la característica "misteriosa" que tenían las definiciones por abstracción desaparece, sin necesidad de acudir a los ángeles de nuestra metáfora teológica. Una definición por abstracción, en sentido moderno, consiste siempre en mencionar, con referencia a una determinada relación de equivalencia, una clase de equivalencia. Si la relación de equivalencia es R, una manera de definir una noción por abstracción que atañe a una cierta entidad *a* es decir: "es la clase de equivalencia a la que pertenece *a* respecto de la relación R". Todo ello tiene variadas aplicaciones, como hemos de comprobar de inmediato.

Prometimos ofrecer, de una manera muy simplificada, una idea acerca de cómo se pueden reducir los números enteros a los números naturales, lo cual haremos ahora con el recurso a las nuevas nociones que hemos presentado. Supongamos que partimos de pares ordenados de números naturales, que se representan como (m,n), y que se definiera una relación R de la siguiente manera: "un par ordenado (m,n) tiene la relación R con un par ordenado (p,q) cuan-

do la suma de m y q es igual a la suma de n y p". En la figura, las sumas cruzadas son iguales. Dejamos al lector la tarea de probar que R es una relación de equivalencia.

$m + q = n + p$

Ahora bien, dada la forma en que se ha definido la relación R, si entendemos los elementos del par ordenado (m,n) como un minuendo y un sustraendo, y lo mismo hacemos con el par ordenado (p,q), obtenemos $m-n = p-q$ (por "pasaje de términos"). Aquí advertimos que cualquier par ordenado (m,n) es equivalente a otro en que el primer número o el segundo o ambos son *cero*. Por ejemplo (5,7) es equivalente a (0,2), mientras que (12,7) es equivalente a (5,0) y (4,4) es equivalente a (0,0). (Para comprobarlo, basta hacer las sumas cruzadas.) De un par ordenado en el que uno de los números sea igual a *cero* diremos que está *normalizado*, pudiendo ocurrir que *ambos* sean iguales a cero. Y ahora agregaremos: los pares ordenados cuyo segundo número es *cero* representan a los números *naturales*, de manera que (5,0) representa al número natural 5; en cambio, aquellos pares ordenados cuyo primer número es cero, como (0,5), será considerado un número *negativo* y lo escribiremos –5. En el caso del par (0,0) se le asignará el número natural *cero*. Es fácil advertir que podemos definir entonces estos números como clases de equivalencia respecto de la relación R que hemos introducido anteriormente, y así, por ejemplo, el número natural 5 será la clase de equivalencia de (5,0) y el número negativo –5 será la clase de equivalencia de (0,5).

De acuerdo con esta reducción, los números antes definidos son en realidad clases de equivalencia, a las cuales nos referimos siempre invocando su forma normalizada, y las designamos, de manera abreviada, del siguiente modo: la que corresponde a $(a,0)$ como $+a$ (o simplemente a) y la que corresponde a $(0,a)$ como $-a$. Advierta el lector que a es siempre un *número natural*, de modo que la definición de *número negativo* ha sido introducida con el único de recurso a los números naturales y a la noción de clase de equivalencia. Y cada una de las clases de equivalencia que corresponde a cada par ordenado (m,n), donde m y n son números naturales, será un *número entero* tal como... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3... Introducidos así los números enteros, será necesario definir cuidadosamente las operaciones que podremos efectuar con ellos. La suma se define así: $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$; por ejemplo (8,0) + (0,3) = (8,3), que al ser normalizado equivale a (5,0), o sea: 8 + (–3) = 5. En cuanto a la diferencia, ella se define del siguiente modo: $(a,b) - (c,d)$ será un par de enteros tal que sumado a (c,d) dé como resultado (a,b); por ejemplo, la diferencia (2,0) – (7,0) será (0,5) porque

(7,0) + (0,5) = (7,5), que equivale a (2,0). Es decir: 2 – 7 = –5. De este modo, en el campo de los números enteros es posible efectuar diferencias en las cuales el minuendo es menor que el sustraendo. Análogamente, habrá que definir otras operaciones entre números enteros, tales como el producto y el cociente, pero no nos adentraremos en estos detalles. Bastará decir que hemos reducido los números enteros a un algoritmo que emplea los pares de números naturales, y por tanto que hemos representado los números enteros en la aritmética de los números naturales.

Una reducción semejante, por medio del empleo del método de las definiciones por abstracción y de las clases de equivalencia, puede hacerse para reducir los números racionales a los números enteros. Es habitual representar a los números racionales como quebrados, o sea, como pares ordenados de números enteros (en que el segundo miembro del par es distinto de cero); la relación de equivalencia es muy semejante a la que se emplea para la anterior reducción, con la diferencia de que dos pares ordenados de enteros se consideran equivalentes si los *productos* cruzados (no las sumas cruzadas) son iguales. Sin entrar en detalles, señalamos que el procedimiento de reducción es totalmente análogo al que describimos anteriormente.

No ocurre lo mismo en el caso de la reducción de los números reales a los números racionales, donde es necesario proceder de otro modo. Lo que se acostumbra es tomar el conjunto de los números racionales y definir en él las *cortaduras de Dedekind*, así llamadas en homenaje al matemático alemán mencionado anteriormente. Una cortadura es la partición del conjunto de los números racionales en dos clases A y B que cumplen las siguientes condiciones: (a) todo número de la clase A es menor que cualquier número de la clase B; (b) A y B no tienen elementos comunes; (c) todo número racional pertenece a A *o bien* a B. Cada cortadura define un número *real*. Y aquí pueden ocurrir tres casos. En el primero, A contiene un número *a* que es *mayor* que cualquier otro de A; en el segundo, B contiene un número *b* que es *menor* que cualquier otro de B. En ambos casos, *a* y *b* serán números racionales, positivos o negativos. (Conviene advertir que una cortadura que tenga un último racional *r* en la primera clase define el mismo racional que tiene a *r* como primer elemento de la segunda clase.) Pero hay lugar para un tercer caso, en el cual no se cumpla ni lo uno ni lo otro. Supongamos que la clase B estuviera constituida por el conjunto de los racionales positivos cuyo cuadrado sea mayor que 2 mientras que A fuese el conjunto de los demás números racionales. Se puede probar que no existe ningún número racional de A que sea mayor que cualquier otro de A y que no existe ningún número racional de B que sea menor que cualquier otro de B. En este tercer caso, la cortadura define un *número irracional*, y en particular, en el ejemplo dado, $\sqrt{2}$. Cada cortadura imaginable definirá un número racional o bien un número irracional, es decir, un número real. En síntesis, los números reales se pueden definir como cortaduras, con la exigencia adicional de que se definan además convenientemente las operaciones de suma, diferen-

cia, producto, etcétera, entre tales números. Pero los detalles formales no son del todo fáciles e implicarían un desarrollo cuidadoso que no es indispensable para nuestro tratamiento de la cuestión que estamos abordando.

De las geometrías no euclideanas a los números naturales

El camino que hemos recorrido hasta aquí es bastante curioso. El formalismo de las geometrías no euclideanas ha sido reducido al formalismo de la geometría euclídea, y éste, a través de la geometría analítica de Descartes y Fermat, ha sido reducida al formalismo de los números reales. Pero éste, a su vez, se ha reducido, mediante un modelo relativo que utiliza la noción de cortadura de Dedekind, al formalismo de los números racionales. Finalmente, por el método de las clases de equivalencia, se puede reducir el formalismo de los números racionales al de los números enteros y el de los números enteros al de los números naturales. Se trata de una cadena de reducciones (o sea, de sucesivos modelos relativos) que conduce a un sorprendente resultado acerca del problema de la consistencia de las geometrías no euclideanas, pues dicho problema, por sucesivos "traslados", acaba por desembocar en el de la consistencia del sistema axiomático que desarrolle la aritmética de los números más sencillos concebibles, los naturales. Como analizaremos en el próximo capítulo, dicho formalismo existe, y será necesario entonces preguntarnos si es consistente o no. Pero antes de encarar la discusión de este tema convendrá hacer algunas acotaciones de orden filosófico.

El constructivismo matemático y la eliminación de entidades metafísicas

Se llama *constructivismo matemático* a la tesis según la cual las entidades matemáticas que superan en complejidad a los números naturales pueden ser construidas mediante relaciones de equivalencia (o algún otro procedimiento) a partir de tales números. Quien acepte esta posición comprenderá la célebre afirmación del matemático alemán Leopold Kronecker (1823-1891): "Dios creó el número natural y el resto es obra de los hombres". Sin necesidad de adherir a esta tesis teológica, podemos aceptar que en algún sentido las entidades matemáticas que constituyen la ontología de la matemática clásica son reducibles a los números naturales, punto de vista especialmente interesante para quienes adhieren a la posición realista en la filosofía de la matemática. Lo cual, en verdad, puede ser un mero prejuicio filosófico.

El constructivismo matemático ha entusiasmado a muchos filósofos de la matemática de corte positivista, como los empiristas lógicos, porque, al parecer,

nos brinda un camino para la eliminación de gran número de entidades metafísicas en el seno de la disciplina. Por ejemplo, si adoptamos tal punto de vista, podríamos negar la tesis de que las entidades matemáticas son aquéllas que habitan el segundo mundo de Platón, y declarar *metafísica* a dicha tesis o bien *carente de sentido*. Ante una "entidad sospechosa de ser metafísica", dirían aquellos filósofos, habrá que emplear métodos lógicos que permitan construirla explícitamente a partir de "entidades no sospechosas". De algún modo, la matemática lo ha conseguido, y lo que hemos descrito en este capítulo parece mostrarlo. Lo que no está claro es si este método constructivista puede emplearse de la misma manera en las ciencias fácticas como la física o la biología. En las teorías de esta naturaleza, se introducen términos *observacionales* o *empíricos*, que denotan o se refieren a entidades observables y que estarían un tanto fuera de discusión en cuanto a su fundamentación filosófica, del mismo modo en que para Kronecker lo estaba la naturaleza de los números naturales. Pero además hay términos *teóricos*, según el uso anglosajón de esta terminología, que designan entidades no observables, tales como *átomo*, *neutrón*, *quark* o *gen*. Todo ello ha llevado a los epistemólogos de orientación positivista radical a una posición de extrema desconfianza. ¿Cómo podemos saber que existen entidades designadas por los términos teóricos, a las que denominamos *entidades teóricas*, cuando ello podría ser una suposición metafísica en el sentido de ir más allá del conocimiento seguro que nos ofrece lo observable? ¿No podrían ser eliminados los términos teóricos, admitiendo solamente los observacionales o empíricos? La respuesta es que tal cosa no sería nada conveniente, porque tanto en física como en química o en biología el uso de estos términos es esencial. No se podría elaborar una teoría del campo electromagnético o una teoría atómica si no aceptásemos términos teóricos tales como *campo eléctrico, electrón, átomo* o *molécula*, de manera que los términos teóricos deben ser conservados[4].

El constructivismo epistemológico referido a la ciencia fáctica intenta, ante un término teórico, dar una definición lógica por clases de equivalencia o cualquier otro método análogo, a partir de términos observacionales. La pregunta es: ¿la tentativa exitosa llevada a cabo por los matemáticos para proceder constructivamente con relación a las entidades matemáticas puede repetirse con éxito en el campo de las ciencias fácticas? Esto es lo que creyeron muchos epistemólogos en su momento. El propio Russell, uno de los filósofos más entusiastas del constructivismo matemático, en libros como *Misticismo y lógica*, y también en *Nuestro conocimiento del mundo externo*, parece haber creído que tal hazaña era posible en el campo de la ciencia fáctica. ¿Qué pensamos hoy acerca de esta tentativa? Nos atreveríamos a decir, aunque ello puede ser todavía motivo de controversia, que es una tentativa fracasada. No podemos prescindir de los términos teóricos, y en general los términos teóricos en las ciencias fácticas

4 Sobre este punto se puede consultar Klimovsky, G., *Op. cit.*, Cap. 20.

no se introducen por vía de reducción o construcción a partir de términos observacionales, sino más bien a través de un complicado aparato lógico relacionado con la estructura de las teorías científicas de carácter hipotético deductivo. Lo que en realidad se hace es suponer hipotéticamente que las entidades teóricas existen y que tienen por definición las propiedades que los principios de una teoría fáctica les asignan.

Un problema que se plantea entonces aquí es: la eliminación de la metafísica en favor de un procedimiento constructivista, ¿es realmente digna de confianza? Otra cuestión que se presenta inmediatamente es si realmente la reducción es en algún sentido metafísicamente legítima. Con esto queremos decir lo siguiente: cuando definimos los números enteros a partir de los números naturales de la manera ya descrita, ¿damos con la *esencia* del concepto de número entero? O sea: ¿hallamos realmente lo que los enteros *son*? Estas preguntas resultan muy inciertas, pues no sabemos si existe realmente algo así como la esencia del concepto de número entero. Podemos tener un cierto concepto vago al cual denominamos "concepto de número entero". Pero si queremos ser rigurosos, deberíamos transformar en riguroso lo que es vago, y ello es lo que Rudolf Carnap llama *elucidación*. Cuando se elucida un concepto no se hace algo de naturaleza misteriosa, como es dar con la esencia del mismo, sino estipular convencionalmente un significado, con la condición de que la mayor parte de las propiedades del concepto vago se encuentren replicadas en la definición rigurosa. Por lo cual, cuando efectuamos una reducción constructiva matemática, lo que en realidad estamos haciendo es elucidar de una manera especial determinada noción previa no rigurosa.

Digamos, por otra parte, que el empleo de clases de equivalencia para elucidar la noción de número entero o de número racional, o el método de las cortaduras de Dedekind para elucidar la noción de número real, no son los únicos procedimientos para realizar las elucidaciones mencionadas. De hecho, autores como Peano, por ejemplo, introducen definiciones reductivas por medio de un método diferente para lograr este mismo tipo de resultado; lo que importa es que cuando se hace una reducción constructiva (elucidación) es que, por caso, las propiedades de los números enteros que se aceptaban intuitivamente sean reencontradas en la elucidación. En este sentido, lo que se ha hecho a través de la reducción de la matemática a los números naturales no es, por ejemplo, una identificación metafísica de las entidades matemáticas con las de un mundo platónico. Dicha reducción consiste, por el contrario, en una serie de elucidaciones convencionales, aceptables en cuanto a que en las entidades que estamos construyendo hallamos las propiedades que esperábamos encontrar en la noción vaga del concepto.

¿Es esto suficiente? Si fuésemos muy exigentes y juzgáramos que la reconstrucción tiene que tener un carácter esencial, metafísico, deberíamos decir que no lo es. Pero allí nos internaríamos en un territorio incierto. ¿Hay efectivamente algo así como la *esencia* de un concepto o de una entidad, como lo han sostenido

los cultores de diversas formas de pensamiento metafísico? Como mínimo deberíamos decir que la pretensión de hallar *esencias* es muy controvertible y además muy peligrosa, pues tratar de fundar conocimientos por esta vía ha conducido, como lo prueban la historia de la ciencia y de la filosofía, a resultados nada satisfactorios. Por el contrario, los métodos de elucidación permiten indicar cuáles son las entidades de la matemática diciendo que son las que se construyen mediante definiciones reductivas, carentes de connotaciones metafísicas. Lo importante es que la matemática pura es una ciencia formal, atribuyendo aquí a la palabra "formal" el significado que empleamos en nuestras consideraciones sobre los sistemas axiomáticos, y que el empleo de tales reducciones permite encontrar las propiedades formales de las entidades que se utilizan en los variados campos de la disciplina. Lo cual es suficiente para el matemático.

Hemos llegado a la conclusión de que el problema de la consistencia de los sistemas formales más importantes y clásicos de la matemática se reduce finalmente al problema de la consistencia del formalismo de los números naturales. Pero en este punto cabe preguntarse nuevamente: ¿existe semejante formalismo? Es decir: ¿existe un sistema axiomático formal para los números naturales? La segunda pregunta será: dicho formalismo, ¿será consistente? Expondremos ahora las características del primero que nos ofrece la historia de la matemática, desarrollado a fines del siglo XIX por el matemático Giuseppe Peano.

La axiomática de Peano y el modelo Russell: la reducción de la matemática a la lógica

El sistema axiomático de Peano para los números naturales

Señalábamos en el Capítulo 4 que el italiano Giuseppe Peano (1858-1932) fue uno de los precursores de la crítica metodológica que condujo finalmente a la reformulación, por David Hilbert, de los *Elementos* de Euclides en su libro *Fundamentos de la geometría* (1899). Peano, nacido en Cuneo, Piamonte, fue profesor de Matemática de la Universidad de Turín desde 1890 hasta su muerte, profesor de la Academia Militar de la misma ciudad desde 1886 hasta 1901 y fundador de dos importantes revistas de matemática. Murió en Turín. En diversos escritos pero sobre todo en el ensayo *Los principios de la aritmética expuestos según un nuevo método* (1889), este distinguido matemático propuso introducir los números naturales por medio de un sistema axiomático formal, conocido hoy como "axiomática de Peano". Para ello empleó notaciones que se usan en la lógica contemporánea y en las cuales se inspiró luego Russell. En 1890 creó las hoy llamadas "curvas de Peano", consideradas como el primer ejemplo de *fractal*. Desde 1903 dedicó sus esfuerzos a la creación de una lengua internacional, *Latino sine Flexione*, que no tuvo demasiada trascendencia[1].

¿Cómo es el sistema de Peano para los números naturales? Tratemos de caracterizarlo como un sistema axiomático formal en los términos en que hemos presentado a éstos en el Capítulo 6. Pero aclaremos desde ya que el sistema de Peano no estaba del todo formalizado, pues su lógica subyacente no lo permitía. Parecería, de acuerdo con las nomenclaturas actuales en lógica, que se trata de una lógica de predicados de orden elevado, por lo menos de orden 2 (lo cual significa que es apta por lo menos para analizar *propiedades de propiedades* de individuos y formular incluso proposiciones cuantificadas respecto de ellas). Con esta lógica podemos hacer afirmaciones generales y existenciales acerca de individuos y predicar, de éstos, ciertas propiedades. Y además, y esto es lo más

1 La lengua artificial de Peano fue llamada también *interlingua*, pero actualmente se reserva este nombre para otra similar, cuya gramática y vocabulario fueron creados hacia 1950. Ambas son posteriores a la invención del esperanto por el médico polaco Ludwik Lejzer Zamenhof en 1887.

característico de tal lógica, hacer afirmaciones generales y existenciales sobre las propiedades y las relaciones entre individuos. Es posible en lugar de esta lógica subyacente emplear una lógica más restringida, ya mencionada, la lógica elemental de predicados con identidad, pero en la cual no es posible hacer afirmaciones generales acerca de predicados, propiedades o clases: solo se pueden hacer con ella afirmaciones generales acerca de individuos. Vamos a suponer por el momento que estamos en el primer caso y no en el segundo. Esta diferencia no es una trivialidad, porque si se emplea como lógica subyacente una lógica superior de predicados, el sistema de Peano es mucho más "potente" que si se empleara la lógica elemental. Lo que ocurre es que para muchos lógicos, por razones que vamos a exponer más adelante, las lógicas superiores de predicados son un tanto "sospechosas" y en cambio la lógica elemental no lo es. Sin embargo, Peano no estaba en condiciones de establecer las diferencias entre ambas lógicas y la importancia de estas diferencias. Aceptado que emplearemos para el sistema de Peano una lógica superior de predicados, cabe señalar que la noción de *identidad* forma parte de ella, bien como término primitivo o bien como término definido.

Luego debemos indicar qué términos primitivos se adoptan y cuál es su categoría. Aquí hay tres de ellos: *cero* (0), *siguiente* (o *sucesor*) y *número natural* (o simplemente *número*, si es que no produce confusiones). La categoría de *cero* es la de *constante individual*. En cuanto a *siguiente* es un término para una operación que aplicada a un individuo origina otro al cual llamamos el *siguiente* de él; en ciertos casos, el mismo individuo[2]. Se admite que *número natural* se aplica a una determinada clase de individuos, que es la que en realidad el sistema que Peano quiere caracterizar. En este sistema, además de los términos primitivos, hay también términos definidos. Por ejemplo, "1" se define como "el siguiente de 0"; "2" como "el siguiente de 1" (o sea, "el siguiente del siguiente de 0"); y así sucesivamente. Definimos así todos los números naturales a partir de "1".

Ahora es necesario construir las cuasiproposiciones del sistema. Podríamos por ejemplo introducir expresiones tales como: "*cero* es un número natural", que la lógica subyacente permitiría, o bien "el siguiente de *cero* es un número natural" e incluso hacer afirmaciones más complejas como "si *n* es un número natural, entonces su siguiente también lo es", o bien "para todo número natural, existe otro que es su siguiente". Recordemos que ninguna de estas cuasi-

2 En matemática, la palabra *operación* tiene dos sentidos. En sentido estricto o estrecho implica que si aplicamos la operación a un número, por ejemplo, obtenemos un *único* resultado, como en el caso de "elevar al cuadrado". El cuadrado de 4 es 16, un resultado único. El sentido amplio permite en cambio que pueda haber varios resultados, por caso "obtener la raíz cuadrada". La raíz cuadrada de 4 es tanto 2 como –2, pues ambos números, elevados al cuadrado, dan como resultado 4. Nos atendremos al primero. En este caso, la operación se llama "monovalente"; en el segundo, "polivalente".

proposiciones tiene significación, porque estamos tratando con un sistema axiomático formal.

Entre todas las cuasiproposiciones posibles podemos elegir ahora los axiomas del sistema, los cuales, de la manera en que Peano los introduce, son *cinco*:

Axioma 1. Cero (0) es un número natural.

Axioma 2. Si x es un número natural, el siguiente de x también es un número natural.

Axioma 3. Cero no es el siguiente de ningún número natural.

Axioma 4. Si dos números naturales x e y tienen siguientes idénticos, es que ellos son idénticos.

Axioma 5. Para toda propiedad P, si *cero* tiene la propiedad P y, supuesto que, del hecho de que un número natural cualquiera tiene la propiedad P resulta que el siguiente de ese número también tiene la propiedad P, entonces todos los números naturales tienen la propiedad P.

Este último es el axioma llamado *de inducción matemática*, principio que, en una formulación no enteramente equivalente, mencionamos en el Capítulo 9. El axioma afirma:

Si, para cualquier propiedad P considerada, se cumplen *a la vez* las cuasiproposiciones:

(a) *cero* tiene la propiedad P, y también

(b) si un número natural tiene la propiedad P, el siguiente de ese número también tiene la propiedad P

entonces:

(c) todos los números naturales tienen la propiedad P.

El principio de inducción matemática (o de *inducción completa*) es una generalización de un condicional "si ... entonces". Lo que se *cuantifica universalmente* es la variable P, lo cual significa que afirmaremos algo que se cumple para cualquier propiedad P. Lo que se *generaliza* es el condicional ("$\supset$"). Sabemos que en un condicional, $p \supset q$, se dice que p es el antecedente y q es el consecuente. Y aquí el antecedente es la conjunción de dos condiciones. Una atañe al número *cero* y la otra es un enunciado universal que vincula cualquier número natural con su siguiente. El consecuente es una proposición universal que atañe a todos los números naturales. La primera condición del antecedente es "*cero* cumple la propiedad P", donde P es una propiedad cualquiera que estemos considerando. La segunda dice lo siguiente: "para todo número natural, se cumple que, si tiene la propiedad P, su siguiente también la tiene". Esta condición es un poco más "fuerte" de lo que se podría suponer en principio porque, reiterando lo que ella afirma, si encontramos un número que tiene la propiedad

P, el siguiente del siguiente también tiene la propiedad P y el siguiente del siguiente del siguiente también la tiene, y así sucesivamente.

Estas son las condiciones que, en el antecedente del condicional, se suelen llamar, la primera, *base de la inducción*, y la segunda, *etapa inductiva*. Si en el aludido condicional se cumplen las dos condiciones, la base y la etapa inductiva, entonces el consecuente de dicho condicional es que *todos los números tienen la propiedad P*. El lector puede advertir que el axioma de inducción matemática expone algo que, en cierto modo, es muy intuitivo. La base de la inducción establece que 0, el menor número natural, tiene la propiedad P; y a su vez, la etapa inductiva garantiza que el siguiente de 0, que es el número 1, deberá también tener la propiedad P; pero como 1 tiene la propiedad P, su siguiente, 2, deberá también tener la propiedad P... y así sucesivamente, con lo cual podríamos establecer que, para cada número natural, éste goza de la propiedad P. Claro que aquí nos asaltaría una duda. Por más que avancemos, llegaríamos a afirmar por ejemplo que 45 tiene la propiedad P, y también que la tienen 12438, 23967, 23006981... Pero, ¿qué pasa con los números siguientes a *cualquier* número que consideremos, puesto que los números naturales son infinitos? Precisamente, lo que expresa el axioma 5 de Peano es que si se cumplen la base de la inducción y a la vez la etapa inductiva, entonces *todos* los números naturales tendrán "simultáneamente" la propiedad P. Se puede ilustrar lo que aquí se dice por medio de la siguiente comparación: una fila de fichas de dominó colocadas una junto a la otra, de canto, de tal modo que si una de ellas se cae, empuja a la siguiente y también se cae ésta. Si se hace caer la primera, ella empujará a la siguiente, y ésta a la siguiente... y finalmente caerán todas, tarde o temprano. Lo que afirma el axioma 5 de Peano, en esta ilustración, es que, si asimilamos los números a fichas de dominó, aunque éstas fueran infinitas, caerán en su totalidad.

Puede sorprender al lector que se utilice para el axioma que estamos discutiendo la palabra "inducción", que también se emplea en la metodología de las ciencias fácticas. Es una mera analogía. En nuestro caso, se trata de que, a través del conocimiento de lo que acontece con un número determinado, como el cero, y algunos otros conocimientos, podemos extraer un conocimiento sobre *todos* los números naturales. En las ciencias fácticas, por el contrario, se llama "inducción" al procedimiento que consiste en obtener una afirmación general o ley a partir de un número finito de observaciones particulares o datos[3]. Pero esta analogía no es del todo correcta, porque en matemática no es verdad que estemos partiendo de un número finito de datos. La etapa inductiva, por ejemplo, es en realidad un enunciado universal, pues afirma que, para todo número, sin excepción, si el número tiene la propiedad P entonces su siguiente también la tiene. Por ello algunos lógicos y matemáticos prefieren utilizar otra nomenclatura

3 Véase Klimovsky, G., *Op. cit.*, Cap. 7.

y referirse al "principio de *recursión* matemática". Nosotros, sin embargo, seguiremos empleando la nomenclatura tradicional de Peano.

Es sencillo comprobar que, empleando la notación simbólica actual, los axiomas de Peano pueden expresarse del siguiente modo, donde N es la propiedad *ser número natural*, y *x'* indica el *siguiente* de *x*:

Axioma 1. Cero es un número natural: $N(0)$

Axioma 2. Si *x* es un número natural, el siguiente de *x* también es un número natural: $(\forall x)(Nx \supset Nx')$

Axioma 3. Cero no es el siguiente de ningún número natural: $\sim(\exists x)[(Nx \wedge (0 = x')]$

Axioma 4. Si dos números *x* e *y* tienen siguientes idénticos, es que ellos son idénticos: $(\forall x)(\forall y)[(Nx \wedge Ny) \wedge x' = y'] \supset x = y$

Axioma 5. Axioma de inducción matemática: $(\forall P)\{[P(0) \wedge (\forall x)(Px \supset Px')] \supset (\forall x)Px\}$

¿Tiene modelos el sistema axiomático de Peano?

En principio, los cinco axiomas de Peano parecen constituir un modo contextual de definir la noción de número natural. Podríamos decir: *los números naturales son aquellas entidades que cumplen los cinco axiomas de Peano*[4]. Desde el punto de vista del método axiomático formal, estaríamos presuponiendo que el sistema de Peano tiene un solo modelo y que ese único modelo incluye las *entidades aritméticas* que llamamos *cero, siguiente* y *número natural*. Esta manera de entender la cuestión conduciría a ofrecer lo que se suele llamar "definición implícita" o "contextual" de las entidades de las que hablamos en aritmética, que quedarían unívocamente caracterizadas por las condiciones que establecen los axiomas. Tal fue, al parecer, la creencia original de Peano. Sin embargo, en investigaciones posteriores sobre el método axiomático, la pertinencia de tales definiciones implícitas fue cuestionada debido a que, cuando hay *un* modelo de un sistema, entonces hay más de uno y en realidad hay *infinitos*. Para ilustrar este tema, comencemos por preguntarnos: ¿hay algún modelo para el formalismo de los números naturales? Y de haberlo: ¿es único? Si pudiésemos

4 Aquí se presentan algunos problemas con la introducción de operaciones tales como la suma y el producto de números naturales. Si se emplea la lógica elemental de predicados, es necesario introducir *como términos primitivos* esas dos operaciones específicas, en cuyo caso el sistema de Peano tendría en realidad cinco términos primitivos y nueve axiomas. Pero si se opta por la lógica superior de predicados o la teoría de conjuntos, es posible, mediante un procedimiento algo complicado (que no expondremos aquí), mostrar que hay demostraciones de la existencia de esas dos operaciones. Esta delicada cuestión fue formulada por primera vez por el matemático de origen alemán Carlos Grandjot, radicado en Chile.

mostrar que existe un modelo no tomado de la matemática sino de otro campo del conocimiento, estaríamos reduciendo el problema de la consistencia de los números naturales al de la consistencia del ámbito descrito en el otro campo. Por otra parte, si hubiese un solo modelo, tendríamos razones para creer lo que ya afirmamos: que se está definiendo, contextual o implícitamente, la noción de número natural. Los números naturales serían aquellas entidades que tienen al *cero* como elemento, donde la operación *siguiente* cumple las condiciones de los axiomas 2, 3 y 4, donde *cero* no se obtiene como siguiente de ningún otro número, y que además cumplen el principio de inducción matemática.

Pero vamos a mostrar que ello es imposible. Si el formalismo de Peano tiene algún modelo, tendrá infinitos otros, como ya advirtió Hilbert en su momento a propósito de los sistemas axiomáticos formales en general. Russell, por su parte, enfatizó que en la axiomática de Peano tiene que ocurrir lo propio, con lo cual la pretensión de que se está ofreciendo una definición de número natural se derrumba por completo. Veámoslo con un ejemplo. Supongamos que tuviésemos un modelo para la axiomática de Peano en el cual se corresponda el *cero* con "mi zapato izquierdo", respetando lo que afirman los axiomas. De acuerdo con ello el número 1 en lugar de ser el siguiente de 0 sería el siguiente de *mi zapato izquierdo*. La clase de los números naturales no estaría constituida por 0, 1, 2, 3, 4... sino por *mi zapato izquierdo*, 1, 2, 3, 4, ... Con esta interpretación, un tanto pintoresca, habríamos convertido un eventual modelo para los números naturales "legítimos" en un modelo bastante espurio, pero modelo al fin; porque podría mostrarse que todo lo que se cumple para el primer modelo se cumple para el segundo. Otro modelo de la axiomática de Peano, de carácter un tanto teológico, se puede obtener interpretando el *cero* como "el primer día de la Creación", *número* como "día" y *siguiente* como "el día siguiente". Efectivamente: (1) el primer día de la Creación es un día; (2) si x es un día, el siguiente de x también es un día; (3) el primer día de la Creación no es el día siguiente de ningún otro día; (4) si dos días x e y tienen el mismo día siguiente, es que ellos son el mismo día; (5) si el primer día de la Creación tiene una cierta propiedad P y, si un día tiene la propiedad P el siguiente de ese día también tiene la propiedad P, entonces todos los días tienen la propiedad P. La propiedad P podría ser, por caso, la de tener períodos de luz y otros de oscuridad[5].

Un problema que ofrece el método axiomático formal, por tanto, es que no se puede utilizar para formular definiciones implícitas o contextuales, puesto que, como un sistema admite modelos diferentes, cuando hablamos por ejemplo de "número natural" no podemos decir categóricamente que es aquel tipo de entidad determinada por las condiciones que establece Peano en su axiomática. Si existen distintos modelos, no sabemos realmente de qué estamos hablando,

5 Salvo en las zonas árticas y antárticas cercanas a los polos geográficos. El ejemplo no es del todo adecuado, pero a los autores no se les ha ocurrido otro.

pues hay entidades distintas que interpretan la noción de número natural. Hoy en día se piensa que un sistema axiomático formal, en lugar de definir en forma implícita las entidades a las cuales se refieren sus nociones, lo que en realidad establece en forma explícita es *la clase de los modelos del sistema axiomático*; pero cada modelo del sistema axiomático hace referencia a entidades que pueden ser de muy distinta naturaleza, tales como mi zapato izquierdo o el primer día de la Creación.

Para abundar un poco más en los detalles de este problema, podemos recordar aquí una interesante idea de Russell que trata acerca de cómo, a partir de un modelo de la aritmética de Peano, podemos obtener otros. Suponiendo que tuviéramos un modelo "estándar" de los números naturales, el formado por 0, 1, 2, 3, 4,...., y donde la operación *siguiente* fuese entendida como "sumar 2", podemos obtener otro modelo que cumple los postulados de Peano pero que no coincide con el primero. La correspondencia podría ser ésta: *cero* se sigue entendiendo como el número 0, pero la operación *siguiente* se entiende ahora como "sumar 2". De acuerdo con ello, el siguiente de 0 es 2, el de 2 es 4, el de 4 es 6, etcétera, y *número natural*, en esta interpretación, resulta ser *número par*. Con lo cual estamos evidentemente construyendo un modelo relativo o interno de la aritmética de los números naturales. ¿Por qué? Porque "0 es un número natural" se traduciría como "0 es un número par"; y si n es un número natural, el siguiente de n es un número natural, pues sumándole 2 se obtiene otro número par. Invitamos al lector a que muestre que en esta interpretación se cumplen todos los axiomas de Peano. Por ejemplo, el axioma de inducción matemática se expresaría así: si una propiedad P se cumple para 0 y, si se cumple para un número se cumple también para el siguiente (sumándole 2 al primero), entonces se cumple para todos los números pares. De acuerdo con ello, si hay un modelo para los números naturales, obtendríamos otros tomando los números pares, o los múltiplos de 3 (donde *siguiente* sería "sumar 3"), o los múltiplos de 4 (donde *siguiente* sería "sumar 4"), y en general los múltiplos de un número cualquiera n (donde *siguiente* sería "sumar n"). Comprobamos nuevamente que, si hay al menos un modelo para la axiomática de Peano, entonces hay infinitos, algunos de los cuales tienen un cierto "aire de familia". Como lo advierte Russell, si la lógica subyacente es una lógica superior, entonces todos estos modelos son isomórficos, pudiéndose afirmar que el sistema axiomático de Peano posee *categoricidad semántica*, definida en el Capítulo 8. Podría decirse que esta categoricidad muestra que los axiomas de Peano conforman una misma manera de ordenar ciertas entidades. Russell denomina *progresiones* a todos los modelos de la axiomática de Peano.

Pero volvamos al comienzo. ¿Existe un modelo para la aritmética de Peano? Aquí aparece otra vez el fantasma de Kronecker, para quien los números naturales son entidades creadas por Dios y el resto de la aritmética es obra de los hombres, respuesta a todas luces insatisfactoria. El lector podría invocar el modelo teológico de los días de la Creación para dar una respuesta afirmativa, pero

en realidad éste no es un modelo absoluto sino hipotético deductivo, pues para los físicos que la dimensión temporal se comporte según ese tipo de ordenación es sólo una hipótesis. O bien, tal vez, podríamos adherir al punto de vista de Platón acerca de sus entidades ideales del segundo mundo, porque entre tales entidades tendríamos la sucesión de los números naturales. Obviamente, ello nos comprometería con creencias metafísicas que podrían estar por completo equivocadas: no podemos garantizar que dicho segundo mundo exista.

Que haya o no un modelo para la axiomática de Peano no es un problema trivial. De no haberlo, el discurso matemático no sería otra cosa que un discurso instrumental, el cual, aplicado de cierta manera, es sumamente útil, del mismo modo en que el ajedrez lo es para diversión de quienes aman los juegos. Pero en este último caso, como es obvio, nadie tomaría semánticamente "en serio" las fichas del ajedrez. Podría ser que, en forma análoga, la matemática fuera un mero discurso eficaz, a veces por el placer de jugar y a veces por sus aplicaciones prácticas, pero que detrás de símbolos tales como "7", "12" o "23" no hubiese realmente entidades reales o metafísicas con las cuales computamos. Si esto fuese así, el problema de la consistencia de la matemática quedaría irresuelto.

Se advierte ahora que la pregunta aparentemente metodológica "¿tiene modelos la axiomática de Peano para la aritmética de los números naturales?" conlleva implicaciones filosóficas fundamentales. El siguiente paso será analizar la audaz posición de Gottlob Frege y Bertrand Russell, quienes creyeron encontrar el modelo buscado *dentro de la lógica*.

La reducción de la matemática a la lógica: el modelo Russell

Bertrand Arthur William Russell (1872-1970), tercer conde de Russell, filósofo, lógico, matemático, educador y escritor británico, pacifista y defensor de los derechos humanos, es considerado uno de los pensadores más influyentes y originales del siglo XX. Nació y murió en Gales. Según sus propias palabras, su (extraordinaria) vida estuvo regida por una cita bíblica que aprendió de su abuela: "No seguirás la multitud de los que obran mal". Se graduó en el Trinity College, de Cambridge, Inglaterra, donde adquirió su fervor por la lógica y la matemática. Sus primeros trabajos sobre los fundamentos de la matemática datan de su época de estudiante y luego como miembro del Trinity College, donde conoció al lógico y filósofo Alfred North Whitehead, de quien fue alumno y posteriormente amigo, y con quien habría de colaborar durante algún tiempo. En 1903 Russell publicó *Los principios de la matemática*, y más tarde, en colaboración con Whitehead, los tres enormes volúmenes de los *Principia Mathematica*, que aparecieron en 1910, 1912 y 1913, y que conformaban un grandioso intento de reducir toda la matemática a las ideas básicas de la lógica. Este

libro ahondó la reflexión sobre los fundamentos de la matemática hasta límites insospechados y se adelantó al desarrollo de importantes temáticas de la matemática contemporánea. Pero por entonces se gestaba la primera guerra mundial, y Russell, durante el transcurso de la misma, denunció con energía lo que consideraba una carnicería bélica. Pacifista militante, fue juzgado por la autoría de un panfleto y penado con una multa de cien libras (que no pagó y por ello se le incautaron bienes personales) y luego fue despedido del Trinity College. En 1918 fue detenido y encarcelado durante seis meses, período en el que escribió *Introducción a la filosofía matemática* (1919). Luego de impartir clases en China durante dos años (1921-1922) regresó a Inglaterra y fundó una escuela privada en la que trató de imponer novedosos métodos de enseñanza (1928-1932). Posteriormente, entre 1938 y 1944, desarrolló sus actividades en los Estados Unidos, donde habría de redactar su *Historia de la filosofía occidental* (publicada en 1947). Sin embargo, en 1941 se le prohibió impartir clases en el City College de Nueva York por influencia de los sectores más extremistas de la comunidad religiosa estadounidense, ya que sus puntos de vista, expresados en diversos libros, se oponían a toda religión establecida y propugnaban la libertad sexual. Prosperó una querella presentada ante el Tribunal Supremo de Nueva York y el nombramiento de Russell fue cancelado por decisión judicial, a la vez que se lo tildaba de "decadente abogado de la promiscuidad sexual", "vagabundo", "corrupto", "libertino", "perro que debe ser emplumado" y otras lindezas. El apoyo unánime que recibió Russell por parte de eminentes personalidades filosóficas y científicas como John Dewey y Einstein no fue suficiente. Este último escribió: "Los grandes espíritus han hallado siempre tenaz oposición por parte de las mediocridades, las cuales no pueden entender que un hombre no se someta irreflexivamente a los prejuicios hereditarios y use honrada y valientemente su inteligencia."

Finalizado el siniestro episodio, Russell permaneció en los Estados Unidos por un tiempo, pero en 1944 regresó a Inglaterra y recuperó su cargo en el Trinity College. Aunque apoyó a los Aliados en la segunda guerra mundial, en virtud de las atrocidades del nazismo, fue un decidido opositor al empleo de armas nucleares. En 1950, por su inmensa y valiosa producción literaria, que no sólo incluye obras estrictamente filosóficas y científicas sino también escritos de divulgación, poemas y novelas, recibió el Premio Nobel de Literatura. Junto con Einstein firmó en 1955 el *Manifesto Russell-Einstein*, que reclamaba la reducción de las armas nucleares. Siete años después fue uno de los organizadores de la Primera Conferencia Pugwash, que reunió a numerosos científicos para tratar, entre otros temas, el de la proliferación de dichas armas. Fue el primer presidente de la Campaña por el Desarme Nuclear en 1958, y presidente del llamado "Comité de los 100" en 1960. Allí se manifestó en contra de la política nuclear del gobierno británico, y fue sentenciado a dos meses de cárcel, pena reducida a una semana debido a sus problemas de salud. Luego creó la Fundación Bertrand Russell por la Paz, y apeló en favor de prisioneros políticos, siguió

abogando por la prohibición de las armas nucleares, criticó duramente la guerra de Vietnam y fundó en 1967 el Tribunal de Crímenes de Guerra, al que perteneció el famoso filósofo francés Jean-Paul Sartre. En el prólogo de su *Autobiografía*, Russell escribió estas memorables palabras:

> Tres pasiones simples, pero abrumadoramente intensas, han gobernado mi vida: el ansia de amor, la búsqueda del conocimiento y una insoportable piedad por el sufrimiento de la humanidad. Estas tres pasiones, como grandes vendavales, me han llevado de acá para allá, por una ruta cambiante, sobre un profundo océano de angustia, hasta el borde mismo de la desesperación. He buscado el amor, primero, porque conduce al éxtasis, un éxtasis tan grande que a menudo hubiera sacrificado el resto de mi existencia por unas horas de este gozo. Lo he buscado, en segundo lugar, porque alivia la soledad, esa terrible soledad en que una conciencia trémula se asoma al borde del mundo para otear el frío e insondable abismo sin vida. Lo he buscado, finalmente, porque en la unión del amor he visto, como en una miniatura mística, la visión anticipada del cielo que han imaginado santos y poetas. Esto era lo que buscaba, y, aunque pudiera parecer demasiado bueno para esta vida humana, esto es lo que –al fin– he hallado.
>
> Con igual pasión he buscado el conocimiento. He deseado entender el corazón de los hombres. He deseado saber por qué brillan las estrellas. Y he tratado de aprehender el poder pitagórico en virtud del cual el número domina al flujo. Algo de esto he logrado, aunque no mucho.
>
> El amor y el conocimiento, en la medida en que ambos eran posibles, me transportaban hacia el cielo. Pero siempre la piedad me hacía volver a la tierra. Resuena en mi corazón el eco de gritos de dolor. Niños hambrientos, víctimas torturadas por opresores, ancianos desvalidos, carga odiosa para sus hijos, y todo un mundo de soledad, pobreza y dolor convierten en una burla lo que debería ser la existencia humana. Deseo ardientemente aliviar el mal, pero no puedo, y por ello yo también sufro.
>
> Ésta ha sido mi vida. La he hallado digna de vivirse, y con gusto volvería a vivirla si se me ofreciese la oportunidad[6].

En lo que atañe a los propósitos de este libro, digamos que Russell creyó encontrar un modelo de la axiomática de Peano en la teoría de conjuntos de Cantor, de la cual nos hemos ocupado en el Capítulo 10. Recordemos que para Cantor un conjunto no es una mera clasificación sino una entidad a pleno derecho y que su teoría trata acerca de todo lo que se puede conocer sobre los conjuntos, de la misma manera en que la aritmética trata acerca de todo lo que se puede conocer sobre las entidades llamadas "números". En el mencionado capí-

6 Russell, B., *Autobiografía*, Barcelona, Edhasa, 1990, vol. I, pp. 11-12. (Original: 1967.)

tulo hemos considerado que la teoría de conjuntos es parte de la lógica, porque a la noción de *conjunto* se llega a partir de la noción de *extensión de una propiedad*, y que todo aquello que se define con conjuntos se puede definir empleando propiedades lógicas[7]. Ésta es la opinión de Russell, a la que adherimos, mas no la de otros lógicos como el estadounidense Willard Quine, para quien la teoría de conjuntos es estrictamente *matemática*.

Russell creyó posible hallar un modelo de la axiomática de los números naturales sin presuponer nociones aritméticas. Definió cierto tipo de relación que se puede establecer entre un conjunto y otro, la *correspondencia biunívoca* que ya hemos analizado. Recordemos que una relación R establece una correspondencia biunívoca entre un conjunto o clase A y un conjunto o clase B, cuando para todo elemento de A la relación R hace corresponder uno y solo un elemento de B, y viceversa, es decir, que cada elemento de B es el correspondiente a un único elemento de A. En estas condiciones, no hay elementos de A y B que no estén relacionados. Ilustrábamos anteriormente este tipo de correspondencia con el ejemplo de la relación de matrimonio en las sociedades monogámicas, en donde cada marido tiene su esposa y solo una, y cada esposa tiene un marido y solo uno. (Aquí A es la clase de los maridos y B la de las esposas, y está claro que quienes no están casados no pertenecen ni a A ni a B.) En este sentido, como ya señalamos, se suele decir que, cuando existe una correspondencia biunívoca entre un conjunto A y un conjunto B, éstos son *coordinables*. Se puede probar que la relación de coordinabilidad es una relación de equivalencia, pues cumple las condiciones de reflexibilidad, simetría y transitividad. Toda clase es coordinable consigo misma; si A es coordinable con B, B es coordinable con A; si A es coordinable con B, y B es coordinable con C, entonces A es coordinable con C. Mostrarlo es sencillo, y dejamos la tarea al lector.

Desde un punto de vista cotidiano e intuitivo, advertimos que, cuando dos clases son coordinables, *tienen el mismo número de elementos* o bien que *tienen la misma cantidad de elementos*. Si tenemos dos canastas, una con naranjas y otra con manzanas, y las retiramos de a pares (cada naranja con su correspondiente manzana), y comprobamos además que, al finalizar la tarea las canastas han quedado simultáneamente vacías, vemos que el conjunto de las naranjas y el conjunto de las manzanas son coordinables. Efectivamente, se ha establecido una correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos: cada naranja tiene su correspondiente manzana (que es única) y cada manzana su correspondiente naranja (que es única). Y al cabo de estos "apareamientos" y retirados todos los pares, en las canastas no quedan ni manzanas ni naranjas. En este caso se dice que el conjunto de las naranjas tiene el mismo *número cardinal* que el conjunto

7 Recuérdese que la *extensión* de una propiedad es la zona ontológica de todos los individuos a los cuales se les puede aplicar esa propiedad. Dichos individuos conforman un conjunto: el de los elementos que la satisfacen. (Véase el Capítulo 10.)

de las manzanas. Advierta el lector que no hemos *contado* nada, ni decimos cuál es el número cardinal que tienen en común los dos conjuntos. La noción de *cardinalidad*, en el sentido de que un conjunto tiene la misma cardinalidad que otro, coincide con la noción de que hay una correspondencia biunívoca entre ambos.

Esta definición de número cardinal en términos lógicos (de la teoría de conjuntos) no fue totalmente original de Russell, pues el lógico y filósofo alemán Gottlob Frege (1848-1925) ya la había expuesto en 1884 en su libro *Fundamentos de la aritmética*. Los trabajos de Russell sobre el tema fueron posteriores, y se remontan a principios del siglo XX. Frege nació en Wismar y falleció en Bad Kleinen, ciudades de Alemania. Estudió en las universidades de Jena y Gotinga, institución esta última donde se doctoró en filosofía (1873). Luego fue profesor de matemática en Jena, donde desarrolló su carrera académica. Frege introdujo muchas notaciones simbólicas y conceptos de gran significación filosófica: es considerado uno de los creadores de la lógica moderna. La circunstancia de que las ideas que estamos presentando sobre los números cardinales suelen ser atribuidas a Russell se debe a que los estudios de Frege quedaron reducidos a un círculo académico muy estrecho, en tanto que Russell expuso y difundió los suyos ante un público científico y filosófico mucho más amplio.

El número cardinal de un conjunto puede ser interpretado entonces como una clase de equivalencia respecto de la relación de cooordinabilidad. Así llegamos a la definición de Russell: "el número cardinal de un conjunto es el conjunto de todas las clases coordinables con él". En esta manera de hablar, debemos imaginar que hemos considerado un conjunto A y luego todos los que son coordinables con él; el conjunto de éstos es el número cardinal de A. (Adviértase que se trata de un conjunto de conjuntos.) La misma idea se nos había presentado cuando expusimos la reducción del problema de consistencia de los números racionales a la de los enteros y la de los enteros a la de los naturales. Ahora hemos reencontrado la cuestión en un tema que es muy importante desde un punto de vista filosófico: la posibilidad de definir el número cardinal a partir de nociones lógicas[8]. Restaría ahora la tarea de definir, a partir de aquí, los números naturales.

Antes de mostrar cómo es posible hacerlo, señalemos que la teoría de conjuntos de Cantor conduce a un gran descubrimiento: con la definición de número cardinal que hemos ofrecido, es posible hablar de números cardinales incluso en el caso de los conjuntos *infinitos*. Tales números se llaman *cardinales transfinitos*. Por ejemplo, si se toma el conjunto (infinito) de los números natu-

8 Conviene aclarar que cuando aquí hablamos de "definición", no aludimos a la aprehensión de un concepto absoluto sino más bien a una *elucidación* o sea a una reconstrucción conveniente y aclaratoria del concepto entre muchas otras posibles. (Recuérdese lo afirmado en el Capítulo 12.)

rales, a dicho conjunto le corresponderá un determinado número cardinal transfinito, llamado $\aleph_0$ (*alef sub-cero*, donde *alef* es la primera letra del alfabeto hebreo). El gran descubrimiento de Cantor es que, en realidad, distintos conjuntos infinitos pueden tener distintos cardinales transfinitos. Por ejemplo, el cardinal que corresponde al conjunto de los números naturales ($\aleph_0$) no es el mismo que el que concierne al conjunto (infinito) de los números reales, llamado $\aleph$ (*alef*). Dicho de otro modo, existen distintas clases de conjuntos infinitos, a cada uno de los cuales le corresponde un número cardinal transfinito. Con estos números es posible construir una nueva aritmética, la *aritmética transfinita*[9]. En su momento, como señalamos en el Capítulo 10, estas revolucionarias ideas de Cantor generaron intensas controversias, y muchos célebres matemáticos de la época se negaron a aceptarlas.

Pero posteriormente, a partir de la teoría de Cantor, otros matemáticos, entre ellos Russell, se propusieron reinterpretar los axiomas de Peano ofreciendo una noción modelística de número natural. Lo expondremos en la versión de Russell. Recordemos que los términos primitivos de la axiomática de Peano son tres: *cero*, *siguiente* y *número natural*. La propuesta de Russell es la de interpretar *cero* como el cardinal del conjunto vacío o clase nula Ø. La interpretación de la operación *siguiente* es algo más complicada. Supongamos tener un número cardinal *m* característico de cierto conjunto M, y consideremos un nuevo conjunto M' cuyos elementos son los de M a los cuales agregamos un elemento *a* que no pertenezca a M. Este conjunto M' tendrá un cardinal *m'*, y diremos que *m'* es el *siguiente* de *m*. Es sencillo demostrar que si en lugar de *a* consideramos otro elemento *b* que tampoco pertenece a M, el cardinal del nuevo conjunto M" será también *m'*. Por consiguiente, el siguiente de un cardinal *m* es único.

Nos detendremos ahora particularmente en el problema de cómo "traducir" al lenguaje conjuntístico el axioma de inducción matemática, el quinto axioma de Peano. Diremos que un conjunto de cardinales es *inductivo* si cumple las siguientes condiciones: (a) *cero*, el cardinal que acabamos de definir, es uno de sus elementos; y (b) si algún elemento *m* es un cardinal que pertenece al conjunto, su siguiente *m'* también pertenece a él. Consideremos ahora el conjunto de todos los conjuntos inductivos, y tomemos la parte común a todos ellos, I, o sea lo que en la teoría de conjuntos hemos denominado la *intersección* de los mismos. ¿Quiénes forman esta intersección? Los individuos que pertenecen a todos los conjuntos inductivos: si un individuo perteneciera a un conjunto induc-

9 Las operaciones de la aritmética transfinita tienen muchas propiedades totalmente distintas de aquellas que caracterizan a la aritmética habitual (finita). Por ejemplo: $\aleph_0 + 5 = \aleph_0$, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$. El lector interesado en este tema puede consultar *Matemáticas e imaginación*, de Edward Kasner y James Newman, con prólogo de Jorge Luis Borges, Madrid, Hyspamérica, 1985, Cap. II. A veces se habla de los *alef* como un tipo peculiar de números cardinales, pero en una acepción distinta de la que presentamos aquí.

tivo pero no a todos, no pertenecería a la intersección. Entonces, según Russell, es posible definir *la clase N de los números naturales como la clase I*, es decir, la que hemos introducido como *intersección de todos los conjuntos inductivos*. Para probar que es un modelo, es necesario demostrar que los cinco axiomas de Peano se satisfacen, con lo cual obtendríamos un *modelo conjuntista* del formalismo de la aritmética de los números naturales. Veamos por qué ello es así.

• *Primer axioma:* "0 es un número natural". En la traducción de Russell, ello significaría que 0 pertenece a N, o bien: 0 pertenece a I. Como *cero* pertenece a cualquier clase inductiva (por definición) tiene que pertenecer a la intersección I, y la intersección I es precisamente lo que estamos considerando como la clase N de los números naturales. Luego, este axioma se cumple.

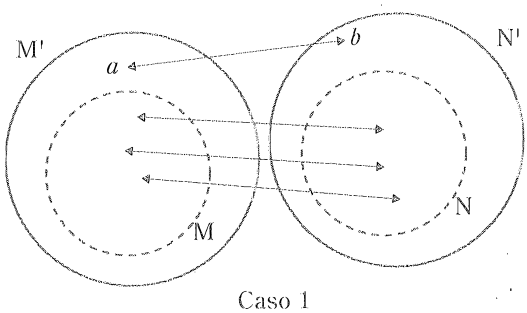
• *Segundo axioma:* "si n es un número natural, su siguiente n' es también un número natural". Aquí hay que tener en cuenta que si n es un número natural entonces pertenece a la clase N, o sea a la intersección I de todos los conjuntos inductivos. Por tanto, si n pertenece a I, pertenecerá a cualquier conjunto inductivo que se considere; pero, por definición de conjunto inductivo, su siguiente n' también pertenecerá a él; por lo cual, también pertenecerá a I. Por consiguiente, n' es un número natural.

• *Tercer axioma:* "*cero* no es el siguiente de ningún número natural". Si recordamos la definición conjuntística de "siguiente", se advierte que el conjunto vacío no se puede obtener agregándole a un conjunto un elemento a que no le pertenezca. Por consiguiente, no hay ningún cardinal mediante el cual, tomando su siguiente, se obtenga el número *cero*. Concluimos, por tanto, que este tercer axioma se cumple.

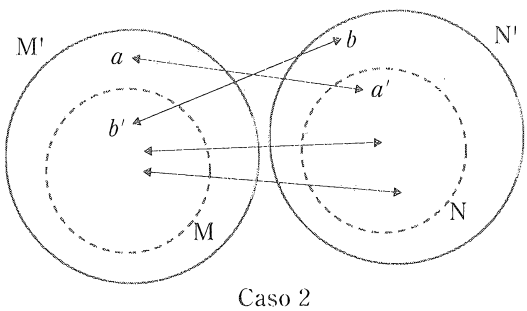
• *Cuarto axioma:* "si dos números naturales m y n tienen el mismo siguiente, es que ellos son idénticos". Probar que este axioma se cumple es algo más complicado y lo haremos con el auxilio de figuras. (Véase la página siguiente.)

Sea un conjunto M cuyo cardinal es m y un conjunto N cuyo cardinal es n. Agreguemos a M un elemento a, con lo cual obtenemos M', y hagamos lo mismo con N, agregándole un elemento b: obtendremos N'. Es evidente que el cardinal m' de M' y el cardinal n' de N' cumplen $m'=n'$. ¿Por qué? Porque m' es el siguiente de m y n' es el siguiente de n, y hemos admitido que estos siguientes son idénticos. Pero si $m'=n'$, debe existir una correspondencia biunívoca entre M' y N': estos conjuntos son coordinables. Y aquí pueden acontecer dos casos: (1) que a se corresponda con b, y los elementos de M se vinculen con elementos de N, de lo cual resultaría que M y N son coordinables, y por tanto $m=n$; (2) que a se corresponda con un elemento a' de N y que b se vincule con un b' perteneciente a M. Pero entonces, haciendo un pequeño "retoque", re-

definimos la correspondencia haciendo que a b' le corresponda a' y que a a le corresponda b, con lo cual estamos en el primer caso. Obviamente, la nueva correspondencia sigue siendo biunívoca y por lo tanto $m = n$. El cuarto axioma de Peano se cumple.



Caso 1



Caso 2

• *Quinto axioma:* "para toda propiedad P, si *cero* tiene la propiedad P y, supuesto que, del hecho de que un número natural cualquiera tiene la propiedad P resulta que el siguiente de ese número también tiene la propiedad P, entonces todos los números naturales tienen la propiedad P". Demostrémoslo. Consideremos una propiedad P cualquiera que satisface estas dos condiciones: (a) *cero* tiene la propiedad P, y (b) el siguiente de cualquier número que tenga la propiedad P también debe tenerla. Esta propiedad P tiene una *extensión* E determinada, y evidentemente, si *cero* satisface P, tendrá que pertenecer a dicho conjunto E. Por otra parte, si un número natural n tiene la propiedad P deberá pertenecer a su extensión E; por consiguiente, E es un conjunto inductivo, porque *cero* debe pertenecer a E, y además, si un número pertenece a E, su siguiente también pertenecerá a E en virtud de (b). Siendo así, E debe contener a la intersección I de todos los conjuntos inductivos: esa intersección es la clase N de los números naturales. Por tanto, E, la extensión de la propiedad P contiene a la clase de los números naturales, y por consiguiente la propiedad P la tendrán todos los números naturales. El quinto axioma de Peano se satisface.

Hemos mostrado entonces que los cinco axiomas de Peano se cumplen en la interpretación (lógica) de Russell, y por tanto estamos en presencia de un modelo conjuntístico de la axiomática de los números naturales. El lector recordará que en su momento señalamos que si la axiomática de Peano tiene un modelo, tiene que tener infinitos modelos. ¿Por qué era importante señalar que si hay un modelo entonces hay infinitos? Para desterrar la idea equivocada de que los axiomas de Peano constituyen una definición implícita unívoca de la noción de número natural. Lo que no se podía asegurar, hasta el momento, es que la axiomática de Peano tuviera al menos *un* modelo, pero ahora contamos con este modelo lógico de Russell, al cual con justicia habría que llamar de Frege-Russell.

Es interesante advertir en el modelo de Russell *qué* corresponde (en el diccionario, columna derecha) a cada uno de los números naturales. "Cero" se interpreta como el cardinal de la clase vacía; dicho cardinal es el conjunto de los conjuntos coordinables con la clase vacía. Pero tales conjuntos, obviamente, deben ser vacíos; además, sólo hay una clase vacía, de donde resulta que "cero" se interpreta como "la clase que tiene un único elemento: la clase nula", es decir: $\{\emptyset\}$. La interpretación de "1" se obtiene si recordamos que "uno" es el siguiente de "cero". El lector recordará que un cardinal es siguiente de otro si los conjuntos que lo forman son los que se obtienen agregando un elemento cualquiera a los conjuntos que constituyen el cardinal dado. Pero así resultaría que "1" es el conjunto de todos los conjuntos *unitarios* (véase el Capítulo 10), mientras que el "2" es el conjunto de todos los *pares* (no ordenados), "3" el de las *ternas*, y así siguiendo. "12", por ejemplo, sería el conjunto de todas las *docenas*. Aquí el lector puede sospechar que nos hallamos en presencia de un círculo vicioso, pues hemos afirmado anteriormente que los conjuntos unitarios tienen un solo elemento, y ahora decimos que "1" es el conjunto de todos los conjuntos unitarios. Pero no es así. En rigor, un conjunto unitario puede caracterizarse como un conjunto *no vacío* cuyos elementos son todos idénticos, sin introducir en esta definición el número *uno*. En cuanto a los *pares* no ordenados, podría definirse un par como el conjunto de todos los conjuntos que son siguientes de conjuntos unitarios. De manera análoga, el número siguiente a n (el conjunto de todos los conjuntos de $n+1$ elementos) puede definirse como el conjunto de todos los conjuntos que son siguientes a algún conjunto de n elementos.

Dos versiones del logicismo

El modelo resultante de la propuesta de Russell es significativo porque ahora se ha interpretado el sistema axiomático formal de los números naturales haciendo corresponder los términos y axiomas del primero con entidades estudiadas por la disciplina lógica. Y puesto que gran parte de la matemática es reducible en último término a la axiomática de los números naturales, resulta finalmente que *la matemática es reducible a la lógica*. En líneas generales, ésta es

la posición *logicista* en matemática. Podría decirse que si poseemos de antemano la lógica, la matemática no sería otra cosa que uno de sus capítulos, extraordinariamente importante y extenso. Si toda la parte de la lógica ajena a la matemática pudiese ser presentada en un libro de texto, la matemática, como capítulo de la lógica, ocuparía *miles* de textos.

Señalamos en su momento que el desarrollo de los sistemas axiomáticos formales de la matemática reservaba un papel esencial para la lógica, en virtud de la importancia de la teoría de la deducción, es decir, la teoría del razonamiento correcto que se ha de aplicar. Encontrar los teoremas de un sistema axiomático consiste precisamente en deducir conclusiones lógicas a partir de los axiomas. Pero si aceptamos que la matemática es un capítulo de la lógica, se justificaría la afirmación de Russell de que aquella disciplina es en realidad *lógica aplicada*, tanto desde el punto de vista de la teoría de la deducción como del empleo de conceptos de naturaleza lógica.

Nos encontramos nuevamente con un vínculo estrecho entre matemática y lógica, puesto que lo que estamos diciendo es que todo el discurso de la matemática, mediante algunas convenientes interpretaciones, podría reducirse al discurso de la lógica. Desde luego, si partimos de las geometrías no euclídeas y euclídea e hiciéramos todas las reducciones necesarias para llegar a este modelo lógico de Russell, el proceso resultante es muy complicado. De hecho, las estructuras conjuntísticas involucradas en él son intrincadas, pero lo cierto es que muchas de tales traducciones han sido efectivamente realizadas por lógicos y matemáticos.

Pero si la matemática es un capítulo de la lógica, ya no cabe avalar aquella idea de Russell según la cual la matemática es una ciencia de la que nunca se sabe de qué se habla, ni si lo que se dice es verdadero o no. Porque si el discurso matemático es reducible al discurso lógico, cuando hablamos de números naturales y en general de entidades matemáticas, después de la reducción de Russell estaremos hablando acerca de entidades lógicas tales como conjuntos y relaciones entre conjuntos. Así concebida, la matemática sería una ciencia tan provista de contenido semántico como cualquier otra.

No cabe duda de que en tanto se investiguen sistemas axiomáticos formales, la matemática es una "ciencia vacía", porque cada vez que desarrollamos un sistema axiomático formal no sabemos acerca de qué estamos hablando, es decir, no aludimos a ninguna esfera ontológica determinada. Todo el discurso del sistema es como una especie de molde u horma "vacíos" que se pueden llenar de distintas maneras según los diccionarios que adoptemos al interpretarlos. En este sentido, la matemática pura sería realmente una "ciencia vacía". Pero hecha la reducción de Russell, el discurso matemático, ahora interpretado, habla acerca de conjuntos, de conjuntos coordinables, de clases de equivalencia, de conjuntos inductivos. Esta matemática interpretada en términos lógicos no sería entonces una "ciencia vacía", sino una ciencia acerca de entidades de la lógica. Conviene aclarar que esta reducción de la matemática a la lógica es lo que denominamos *primera versión* del logicismo, debida a Russell y Frege; pero posteriormente,

a la luz de los *Principia Mathematica*, de Russell y Whitehead, el logicismo implicó una *segunda versión* algo más complicada, asunto sobre el cual no podemos entrar en detalles.

Aquí se presentan entonces dos posibilidades acerca de la naturaleza de la matemática pura. La primera, que hemos sostenido explícitamente hasta ahora al hablar de los sistemas axiomáticos formales, asimila la matemática pura a un discurso sin contenido significativo u ontológico alguno. La segunda posibilidad, para quienes la sustentan, consiste en rechazar la tesis anterior y argumentar que gracias al modelo Russell podemos hablar por caso de "conjuntos", lo cual dotaría a la matemática pura de contenido semántico y ontológico, sean lo que fueren los conjuntos. (Advierta el lector que en este caso la matemática sigue siendo "pura" porque se reduce a la lógica formal y no a alguna ciencia fáctica.) No estaríamos, por tanto, en presencia de una "ciencia vacía". La primera posición es adoptada por los llamados *formalistas*, como Hilbert, mientras que la segunda es característica de los logicistas, como Frege y Russell. Este último la expone en su primera versión en *Los principios de la matemática* (1903) y luego en detalle, en su segunda versión, en los *Principia Mathematica* (con Whitehead). Para un logicista, insistimos, el carácter formal de la matemática pura radicaría en que la interpretación de Russell se formula en el campo de la lógica, que al fin de cuentas puede ser también considerada una ciencia formal, en el sentido de que opera con formas de razonamiento que hacen caso omiso a la significación de las expresiones. Desde luego, el logicista se enfrenta a un serio problema filosófico que el formalista no tiene: el de dilucidar cuál es la naturaleza ontológica de los conjuntos.

A modo de aclaración, cabe señalar que la lógica puede exponerse como un sistema sintáctico formal, o bien como un sistema deductivo en el cual hay aspectos semánticos y en particular principios y consecuencias de ellos, que se obtienen por medio de razonamientos[10]. Sin duda, en la exposición de Russell se sigue el segundo camino. En los dos casos, es lícito preguntarse si tales razonamientos lógicos no conducirán a contradicciones. Dicho de otro modo: ¿es consistente la lógica? Como el lector advertirá, aquí se produce un nuevo "desplazamiento" del problema de la consistencia de la matemática, pues, si se adopta el punto de vista logicista, dicho problema se ha trasladado a la lógica.

¿Es consistente la lógica?

La tentación aquí es responder que la lógica *debe* ser consistente, pues en caso contrario todo discurso humano quedaría sin sustentación. ¿De qué valdría

10 Esta última tradición se originó especialmente en las investigaciones del ya mencionado Alfred Tarski.

argumentar por medio de razonamientos si éstos, eventualmente, podrían llevarnos a la conclusión "Marte tiene satélites" pero también, a la vez, a la conclusión "Marte no tiene satélites"? Hallar contradicciones en el seno de la lógica sería catastrófico. En el momento en que Russell hace su reducción, parece pensar que el sistema de la lógica, que da organicidad racional a nuestro pensamiento, no puede ser menos que consistente. Si esto fuese así, al cabo del largo camino esbozado por etapas en capítulos anteriores, el problema de la consistencia de todos los formalismos que hemos considerado hasta aquí (comenzando con los de las geometrías no euclideanas) quedaría reducido al de la consistencia de la lógica (y en particular al de la teoría de conjuntos). Es decir, según la posición logicista tendríamos lo siguiente:

Desplazamiento del problema de la consistencia: de las geometrías no euclideanas a la lógica

De ser cierto todo ello, ya no habría amenaza de que el discurso matemático fuese un mero discurso vacío sin eventuales aplicaciones, que sólo son posibles si la matemática es consistente. Sin embargo, el lector debe advertir que la consistencia de la lógica es una mera presunción que habrá que poner en evidencia, tema que desarrollaremos en el próximo capítulo.

En el Capítulo 2 formulábamos a distintos matemáticos y filósofos nuestras cuatro preguntas acerca de la matemática, comenzando por el remoto escriba egipcio Ahmés. Posteriormente, al ocuparnos de los sistemas axiomáticos formales, en el Capítulo 6, las reiterábamos a propósito de la matemática pura que presuponen tales sistemas. Sucintamente, las respuestas eran: (1) ¿De qué hablan las afirmaciones de la matemática? *Tales afirmaciones no hablan de nada en particular, porque los términos específicos de los sistemas axiomáticos carecen de designación.* (2) ¿Por qué creer en ellas o cuál es la fuente de su verdad? *Tal interrogante carece de sentido, pues la elección de los axiomas es convencional, y de las cuasiproposiciones de un sistema axiomático no podemos predicar su verdad o falsedad.* (3) ¿Cómo se amplía el conocimiento matemático? *Por medio de la creación de nuevos sistemas axiomáticos a partir de los existentes con anterioridad o bien con el desarrollo de nuevos teoremas de sistemas conocidos.* (4) ¿Qué relación existe entre la matemática y lo real? *La matemática pura no se refiere a realidad alguna, porque los sistemas axiomáticos formales no tienen significación o referencia.*

Las respuestas anteriores sobre la matemática pura satisfarían el punto de vista que hemos llamado *formalismo*. Pero formuladas a un logicista, con su creencia de que la matemática es reducible a la lógica, obtendríamos respuestas diferentes. Ellas serían: (1) ¿De qué hablan las afirmaciones de la matemática? *De entidades lógicas, tales como conjuntos.* (2) ¿Por qué creer en ellas o

cuál es la fuente de su verdad? *Porque son verdades lógicas y por tanto la lógica es garantía de su verdad.* (3) ¿Cómo se amplía el conocimiento matemático? *Por medio de nuevos desarrollos en materia de lógica y en particular de teoría de conjuntos.* (4) ¿Qué relación existe entre la matemática y lo real? Este delicado problema de la filosofía admite varias respuestas. Una de ellas es que las leyes últimas de la realidad evidencian coincidencias con las leyes de la lógica, entendida ésta como disciplina relacionada con el lenguaje o con el pensamiento. Por ejemplo, si se admite como principio ontológico que un objeto real *no* puede tener a la vez una propiedad y no tenerla, ello parece corresponderse con el principio lógico según el cual una proposición no puede ser a la vez verdadera y falsa.

Esta reducción de la matemática a la lógica es particularmente importante porque dota a la matemática de un lenguaje unificador, el de la teoría de conjuntos, ya se investigue, por caso, en topología, en álgebras y geometrías abstractas o en geometría fractal. Cuando hoy se habla de la "unicidad metodológica" de la matemática es porque es casi imposible evitar que las nociones básicas de una teoría matemática cualquiera se formulen sobre la base de conjuntos especiales sometidos a ciertas peculiaridades. Por ello afirmábamos que George Cantor fue el autor de una revolución científica que implicó un cambio metodológico central en la investigación y formulación de los resultados de la misma en matemática.

La situación en que encontramos la filosofía de la matemática a comienzos del siglo XX era un tanto paradisíaca, pues la matemática parecía formar parte del horizonte maravilloso y seguro de la lógica, disciplina cuya consistencia aparentaba ser innegable. Sin embargo, el enemigo estaba oculto. En 1897, el matemático italiano Cesare Burali-Forti, discípulo y colega de Peano, publicó una memoria en la cual mostraba que, en el seno de la teoría de conjuntos, *era posible hallar contradicciones*. Hacían su aparición las *antinomias lógicas*, de las cuales nos ocuparemos en el capítulo siguiente.

Las antinomias lógicas

El surgimiento de las antinomias lógicas

Antes de considerar las antinomias lógicas, las cuales, según ya anticipamos, mostrarían en principio contradicciones en el seno de la teoría de conjuntos y de la lógica moderna en general, queremos hacer una aclaración de nomenclatura. Preferimos reservar la palabra "paradoja" para aquello que, sin ser una contradicción, parece transgredir nuestro sentido común o nuestras intuiciones. Una "antinomia", por el contrario, es un argumento que termina señalando una aparentemente inevitable *contradicción*. En última instancia la paradoja sería resoluble, mientas que la antinomia, en principio, no lo sería.

Ya señalamos que, en 1897, Burali-Forti, uno de los iniciadores de la lógica moderna, publicó un trabajo en el cual señalaba que la teoría de Cantor lleva a contradicciones. Lo hizo en la revista *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* y su memoria se titulaba "Una dificultad en la teoría de los números transfinitos". Por la misma época (unos dos años antes), el propio creador de la teoría de conjuntos, Cantor, también advirtió que, si se opera de una manera un tanto intuitiva con la teoría de conjuntos, ella conduce a contradicciones. Pero Cantor creyó que la antinomia era resoluble. La expuso como mera dificultad, e incluso sugirió de qué manera podría ser resuelta, aunque sus ideas no están expuestas con rigor y son más bien una propuesta antes que una solución. En cambio, la actitud de Russell fue bien distinta. Alrededor de 1900, Russell encontró dificultades de carácter más serio en la lógica de Frege, pero sólo publicó un trabajo sobre ello en 1903. Otra antinomia fue descubierta en 1901 por el propio Russell. Éste admitió sin tapujos que las antinomias podrían en principio poner en jaque a la reducción de la matemática a la lógica. Vamos a tratar de aclarar al lector en qué consistía este tipo de dificultades. Expondremos a continuación cinco argumentaciones, de las cuales sólo las últimas tres son verdaderamente antinomias, o sea contradicciones que realmente hay que solucionar mediante un cambio de nuestras creencias acerca de la naturaleza de la lógica. Las dos primeras, en cambio, son paradojas.

Dos paradojas y tres antinomias

(1) La primera es la llamada *paradoja del barbero*, de Russell, quien, al parecer, no fue el primero en formularla. En cierto pueblo, algunos hombres se afeitaban a sí mismos y otros no lo hacían, pues, ante la carencia de barberos, delegaban la labor en amigos, familiares o vecinos. Pero a la postre éstos resultaron ser ineficaces, pues ocasionaban heridas y magulladuras. Finalmente, dadas las protestas de los afectados por esta situación, el alcalde decidió contratar a un barbero, cuya tarea, *por contrato*, era precisamente afeitar *exclusivamente* a quienes no se afeitaban a sí mismos. El problema que surge es: ¿quién afeita al barbero? Si se afeita a sí mismo, vulnera el contrato, porque sólo puede afeitar a los que no se afeitan a sí mismos; pero si no lo hace debería hacerlo, pues, por el contrato, debe afeitar a quienes no se afeitan a sí mismos. En resumidas cuentas: si se afeita a sí mismo no debe afeitarse a sí mismo y si no se afeita a sí mismo debe afeitarse a sí mismo. Esta es una paradoja y no una antinomia porque la aparente contradicción en realidad lo que muestra es que el contrato estuvo mal redactado, lo cual no es sorprendente en un país como la Argentina, donde muchos funcionarios gubernamentales cometen a menudo este género de disparates.

(2) La segunda paradoja, también de Russell, es la llamada *paradoja de los catálogos*. Imaginemos una enorme biblioteca. En ella habrá libros que se citan a sí mismos y otros que no se citan a sí mismos. Un ejemplo célebre aparece en la segunda parte del *Quijote*, en donde Cervantes, en su "Prólogo al lector", le informa a éste que la misma "es cortada del mismo artífice y del mismo paño que la primera" (sugiriendo que cualquier otra "segunda parte" será apócrifa) con lo cual se ve obligado a citar al *Quijote* en el *Quijote* que en ese momento está escribiendo. Por otra parte, el libro *Las desventuras del conocimiento matemático* pertenece a esta categoría, pues en numerosas oportunidades los autores se refieren a lo que se afirma en "este libro". En cambio, el libro que contiene el libreto de *Otello*, de Verdi, no menciona al libreto mismo. Sería pintoresco que Desdémona dijera algo como esto: "Esposo mío, como os dije en el primer acto de esta ópera...".

Volvamos a nuestra biblioteca. El hallazgo de que hay libros que se citan a sí mismos y otros que no lo hacen lleva al dueño de la biblioteca a pedirle al bibliotecario que confeccione dos catálogos, el catálogo A de todos los libros que se citan a sí mismos y el catálogo B de todos aquéllos que no se citan a sí mismos. Ahora bien, puesto que los catálogos A y B serán libros de la biblioteca, habrá que decidir dónde se incluirá el catálogo B. No lo podemos incluir en B, porque B es el catálogo de los libros que no se citan a sí mismos; pero si *no* lo incluimos en B, será un libro que no se cita a sí mismo, y debería ser incluido en B. El catálogo B debería a la vez *ser incluido* y *no ser incluido* en B: en ello radica la paradoja. Decimos paradoja y no antinomia, porque lo que muestra el argumento es que el catálogo B es imposible de confec-

cionar y que la clasificación solicitada por el dueño de la biblioteca no se puede llevar a cabo[1].

(3) El tercer argumento, una auténtica antinomia, es similar a la paradoja de los catálogos, sólo que menciona *conjuntos* en lugar de catálogos y también *conjuntos* en lugar de libros. Se la llama genéricamente *antinomia de Russell* (1903). Hay conjuntos que se contienen a sí mismos como elementos y otros en los cuales ello no ocurre. Un conjunto de 10 naranjas no es una naranja, y por tanto no se contiene a sí mismo como elemento. El conjunto de todos los conjuntos finitos es infinito y no puede contenerse a sí mismo como elemento porque no es finito. En cambio, el conjunto de todos los conjuntos infinitos es también un conjunto infinito, y por consiguiente se contiene a sí mismo. Que hay infinitos conjuntos infinitos se puede mostrar, por ejemplo, considerando los conjuntos siguientes:

{0,1,2,3,4,5...}
{1,2,3,4,5,6...}
{2,3,4,5,6,7...}
{3,4,5,6,7,8...}

y así sucesivamente.

Llamemos Q al conjunto de todos los conjuntos que se contienen a sí mismos como elemento y R (en homenaje a Russell) al de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elemento. Por el principio lógico de tercero excluido, todo conjunto debe estar incluido en Q o bien en R. Y por el principio de no contradicción, ningún conjunto puede contenerse a sí mismo como elemento y a la vez no contenerse a sí mismo como elemento. Ahora bien, ¿dónde estará ubicado el conjunto R? ¿En Q o en R? Si lo ubicamos en Q, será un conjunto que se contiene a sí mismo como elemento, es decir, R es un elemento de R; pero, por definición de R, los elementos de R no deben contenerse a sí mismos como elemento y, por consiguiente, R no se contiene a sí mismo como elemento. En resumen, *si R no está en R está en R* y análogamente *si R está en R no está en R*. De modo que R debe *estar* en R y *no estar* en R, lo cual viola el principio de no contradicción. Esta es una auténtica contradicción, una antinomia, que no podemos achacar a ambigüedades en el contrato de un barbero o a catálogos imposibles. En la lógica de los predicados y de las propiedades hemos aceptado un principio lógico que hasta el momento parecía obvio, y es que cada propiedad P tiene una *extensión*: el conjunto de todos los objetos o individuos que tienen la propiedad en cuestión. Si la propiedad es "blanco", su extensión es el conjunto de los objetos blancos. Pero si el argumento anterior es válido, admitir que cada propiedad tiene su extensión parecería

1 Cabe advertir que la paradoja no se produciría si al catálogo de todos los libros que no se citan a sí mismos (B) no se lo considera un libro de la biblioteca y por tanto no se lo cataloga.

llevarnos a una contradicción, a una antinomia. Y de ser así nos hallaríamos ante una grave situación. Si la lógica es consistente, toda la matemática lo sería, mas ahora sale a luz una dificultad muy seria, pues la contradicción que suponen las antinomias lógicas estarían mostrando que la lógica *no es consistente*.

También podemos presentar la antinomia de Russell del siguiente modo. Vamos a llamar *autológicos* a los conjuntos que se contienen a sí mismos como elemento y *heterológicos* a los que no se contienen a sí mismos como elemento[2]. ¿Qué sucede con R? ¿Es autológico o heterológico? Si fuese heterológico, no se contendría a sí mismo, pero entonces en R aparecería el conjunto R y por consiguiente debería ser autológico. Si R fuese autológico, se contendría a sí mismo, pero entonces R estaría en R; como R es el conjunto de los conjuntos heterológicos, debería ser entonces heterológico, lo cual viola el principio de no contradicción. No puede una entidad tener una propiedad y al mismo tiempo no tenerla. En este caso, ser R *a la vez* autológico y heterológico.

Si esto fuese así, la prueba de consistencia de Russell para la axiomática de Peano quedaría invalidada. Pero esto no es todo. El proceso de aritmetización de la matemática, que nos permitía, por sucesivas reducciones, "trasladar" el problema de la consistencia desde las geometrías no euclideanas hasta el de la consistencia de los números naturales, implica construcciones que están formuladas actualmente en términos de la teoría de conjuntos. De manera que si se llegara a encontrar alguna dificultad en la lógica contemporánea y en particular en la teoría de conjuntos, no solamente entraría en crisis el modelo conjuntístico de Russell, sino también *toda la aritmetización de la matemática*.

(4) Debemos señalar que la antinomia de Russell no obliga forzosamente a a hablar en la terminología de los conjuntos, aunque éste es el hábito generalizado entre los matemáticos contemporáneos por la gravitación de las ideas de Cantor. Puede reaparecer perfectamente en términos de lógica que no involucran a la teoría de conjuntos. Consideremos por caso las propiedades que pueden tener o no las entidades que pueblan el universo. Hay propiedades que son universales, como por ejemplo *idéntico a sí mismo*, que se aplican a todo elemento. También hay propiedades más restringidas, como la propiedad de ser blanco o la propiedad de ser una propiedad. Esto último es lo que lleva a una situación contradictoria similar a la que hemos expuesto a propósito de los conjuntos. Ahora serán las propiedades las que se pueden clasificar en *autológicas* y *heterológicas*. Una propiedad es autológica si se puede aplicar a sí misma, es decir, si ella está comprendida entre las entidades que tienen dicha propiedad. La propiedad de ser una propiedad se aplica a sí misma, y es por tanto autológica. En cambio, una propiedad será heterológica si esto no es así; por ejemplo,

2 Las palabras "autológico" y "heterológico" se emplean generalmente para otra antinomia, pero nos parece oportuno utilizarla también en este caso.

la propiedad de ser una lechuza no es una lechuza, y por consiguiente no se puede aplicar a sí misma: es una propiedad heterológica.

Consideremos ahora la propiedad "heterológica". Como sucede con cualquier otra propiedad, a ésta le pueden suceder dos cosas: (a) que se aplique a sí misma, y (b) que no se aplique a sí misma. Por el principio de tercero excluido, no cabe otra posibilidad. En el caso (a) la propiedad "heterológica" se aplica a sí misma, es decir "heterológica" es heterológica; pero al ser heterológica, no puede aplicarse a sí misma, y por lo tanto debe ser autológica. Y si estamos en el caso (b), la propiedad "heterológica" no se aplica a sí misma y resultaría que "heterológica" debe aplicarse a sí misma, o sea que "heterológica" debe ser autológica. Llegamos entonces a la contradicción: la propiedad "heterológica" *no se aplica a sí misma* y a la vez *se aplica a sí misma*, es decir, es a la vez heterológica y autológica. Esta antinomia, también original de Russell, se llama "antinomia de las propiedades".

(5) Es interesante señalar que existen antinomias en las cuales no se mencionan conjuntos o propiedades sino que se presentan en términos lingüísticos: se las llama *antinomias semánticas*, a diferencia de las primeras, denominadas *antinomias lógicas*[3]. La antinomia que presentaremos ahora se debe a los lógicos Leonard Nelson y Kurt Grelling, y fue formulada en la primera década del siglo XX. Es evidente que ciertas expresiones lingüísticas tienen propiedades que otras no tienen. Por ejemplo, hay palabras bisílabas, como "perro", y las hay polisílabas, como "naranja". Pero "bisílaba" y "polisílaba" son palabras y por tanto se las puede analizar en los términos anteriores. La palabra "polisílaba" es polisílaba, pero la palabra "bisílaba" no es bisílaba. Por consiguiente, hay palabras que, en tanto adjetivos, se aplican a sí mismas y otras que no se aplican a sí mismas. Vamos a llamar nuevamente *autológicas* a las palabras (adjetivos) que se aplican a sí mismas, y *heterológicas* a las palabras (adjetivos) que no se aplican a sí mismas. "Corta" es una palabra corta; se aplica a sí misma y es por tanto autológica. En cambio, "larga" no es larga, no se aplica a sí misma y por consiguiente es heterológica.

La dificultad se presenta con la palabra "heterológica". Por el principio de tercero excluido, sólo cabrían dos posibilidades: (a) que se aplique a sí misma, y (b) que no se aplique a sí misma. Si estamos en el caso (a) se aplica a sí misma, es decir "heterológica" es heterológica; pero al ser heterológica, no debe aplicarse a sí misma, y por lo tanto debe ser autológica. Pero si estamos en

3 Una antinomia semántica muy célebre, conocida desde la antigüedad, es la llamada *antinomia de Eubúlides*, que trataremos en el Capítulo 17. Su formulación clásica es sencilla: se refiere a alguien que dice "estoy mintiendo" o sea "lo que estoy diciendo es falso". El lector advertirá que si la afirmación es verdadera entonces debe ser falsa y viceversa. Se la conoce también como *paradoja del mentiroso*, si bien se trata una auténtica antinomia, según nuestra nomenclatura.

el caso (b) o sea que "heterológica" no se aplica a sí misma, resultaría que "heterológica" debe aplicarse a sí misma y por tanto debería ser autológica. Luego, la palabra "heterológica" debe ser *a la vez* heterológica y autológica. Nuevamente estamos en presencia de una antinomia.

¿Qué hacer ante las antinomias lógicas?

En este punto la situación se vuelve muy complicada para la lógica contemporánea, la cual, por otra parte, ha demostrado ser una herramienta muy poderosa de análisis para la ciencia actual. Después de la aparición de estas antinomias, los lógicos tradicionales aristotélicos podrían haber celebrado la aparente crisis de la nueva lógica, en el seno de la cual aparecen contradicciones. Tales lógicos suelen decir que la lógica "auténticamente filosófica" es la aristotélica. Sin embargo, en libros como *La naturaleza del mundo externo*, de Russell, podemos encontrar argumentos en favor de que también la lógica aristotélica presenta serias dificultades y limitaciones. De hecho, desde el punto de vista formal, la lógica aristotélica es un formalismo que queda abarcado como caso particular de la lógica contemporánea.

De todas maneras, en la huella de una célebre afirmación de Hilbert según la cual "el paraíso que nos legó Cantor debe ser protegido", los lógicos y filósofos de la matemática se abocaron al problema de cómo resolver las dificultades que presentaban las antinomias. No era concebible desechar la lógica contemporánea, pues buena parte de la matemática del siglo XX se funda en dicha lógica y en particular en la teoría de conjuntos. El problema radicaba en decidir si la aparición de las antinomias debía ser considerada una auténtica crisis o catástrofe, quizás irresoluble, o de una dificultad resoluble a corto o largo plazo. Cantor, al parecer, adhirió al segundo punto de vista. Esta actitud ha sido una constante en la historia de la ciencia. Ninguna teoría científica se descarta de plano, al menos en un comienzo, por el hecho de que ofrezca dificultades.

Conviene aclarar que una especialidad de la lógica actual sigue siendo la de descubrir nuevas antinomias y analizar de qué manera pueden ser resueltas. Pero nosotros, en el próximo capítulo, nos limitaremos a considerar solamente algunas antinomias clásicas, para decidir si pueden o no ser soslayadas, y de ser posible, de qué modo.

Los intentos de resolución de las antinomias 1: la teoría de los tipos y el neointuicionismo

La teoría de los tipos de Russell

Ante la gravedad del problema de las antinomias, se formularon diversas propuestas para solucionarlo. Una de ellas es la del propio Bertrand Russell, desde su posición logicista, de la que ofreceremos a continuación una noción general y no detallada. Presentada informalmente en 1908 en el artículo "La lógica matemática y su fundamentación en la teoría de los tipos", su formulación más elaborada aparece en los *Principia Mathematica* (1910-1913), de Russell y Whitehead. Otras se originaron en las posiciones filosóficas llamadas *neointuicionista* y *formalista*, que analizaremos luego.

Russell concibió lo que llamó "teoría de los tipos". Conocida actualmente como "teoría ramificada de los tipos", su exposición es un tanto complicada y en su momento no tuvo demasiada resonancia en el ámbito filosófico. Expondremos esta concepción a partir de ideas que se encuentran en los libros *Introducción a la lógica matemática* (1944), del lógico estadounidense Alonzo Church, y *Lógica matemática* (1928), de Hilbert-Ackerman (por Wilhelm Ackerman, lógico alemán). Posteriormente, otros autores como el inglés Frank P. Ramsey, el polaco León Chwistek y el alemán Rudolf Carnap propusieron la llamada "teoría simple de los tipos". Esta última no puede resolver todas las antinomias, pero emplea una estrategia que permite dividirlas entre las que se refieren a conjuntos o entidades lógicas y aquéllas que involucran factores lingüísticos. Su propósito es resolver las primeras.

Conviene recordar previamente algunos de los puntos de vista de Henri Poincaré, a quien ya hemos mencionado en capítulos anteriores. Él sugirió una "prohibición" basada en la distinción entre conjuntos *predicativos* y conjuntos *no predicativos*. Un conjunto es predicativo si para su definición no hay que utilizar una previa caracterización del conjunto, y es no predicativo cuando para definirlo es necesario ofrecerla. Esto último es lo que debe ser prohibido: los conjuntos no predicativos deberían ser expulsados de la lógica por cuanto, ligados a ellos, se presenta lo que Russell llamaba el "principio del círculo vicioso". Si un conjunto es concebido como perteneciendo a un nivel de abstracción inmediatamente superior al de las entidades clasificadas por él, no puede suceder que en su definición se presuponga su propia existencia. De modo que entre los

precursores de la teoría de los tipos y de los problemas tanto ontológicos como semánticos que ella plantea, no podemos olvidar el nombre del gran científico francés.

La teoría simple de los tipos

Ya se trate de la teoría ramificada o bien de la teoría simple de los tipos, la idea básica original de Russell es que las propiedades y las relaciones tienen que dividirse en *tipos* que no deben superponerse, por lo cual se comienza por distinguir entre *categorías* y *órdenes* de los conjuntos o de los predicados. Las categorías, siguiendo nociones un tanto aristotélicas, responden a la diferencia entre individuos, predicados monádicos (propiedades), que afectan a un solo individuo, predicados (o relaciones) diádicos, que afectan a dos individuos, predicados (o relaciones) triádicos, que afectan a tres individuos, y, en general, predicados *n*-ádicos (o relaciones) que afectan a *n* individuos. Es obvio, para Russell, que estas categorías deben ser discriminadas. No se puede, por caso, en una proposición, reemplazar un término que expresa una propiedad por un término que expresa una relación. Pero habría que distinguir ahora entre *órdenes* dentro de cada una de estas categorías, con lo cual se obtiene algo similar a la estratificación de los pisos de un edificio. Tendremos un orden *cero*, un orden *uno*, un orden *tres*, y en general, para cualquier número natural, un orden *n*. La categoría de quienes "habitan" en el orden 0 es la de *individuo*, de manera que en él encontraríamos entidades tales como Sócrates, la Ciudad de Buenos Aires o el planeta Saturno. En este orden no hay predicados ni relaciones. Para encontrarlos debemos "ascender" al orden 1, donde hallaremos no individuos sino *propiedades de los individuos*, por ejemplo la propiedad *ciudad,* que se aplicaría a Buenos Aires pero no a Sócrates.

Aquí ya encontramos una primera idea que aparece en la formulación de Russell: para poder pensar acerca de las propiedades de los individuos y sus relaciones es necesario tener con anterioridad tales individuos[1]. "Tener los individuos" puede admitir un sentido ontológico (o sea, aceptar su existencia) o bien cognoscitivo o epistemológico, referido a nuestro conocimiento de los mismos, o peor aún, a nuestras construcciones de realidades (si no somos *realistas* en el sentido actual que se da a este último término). Pero no podemos limitarnos a "tener" las propiedades; es necesario que éstas ayuden a *clasificar los individuos*, y a saber *cómo* clasificarlos. El orden 0 está sobreentendido para poder construir el orden 1, donde se encuentran las propiedades que permitirán clasificar las entidades de orden 0. En el orden 1 no solamente encontramos las *pro-*

1 Sin duda, hay que admitir que puede haber propiedades compuestas o definidas por combinación de estas "primeras propiedades" y que ellas pudieran muy bien no tener individuos que las ejemplifiquen.

piedades de los individuos sino también las *relaciones* entre ellos, de manera que, por ejemplo, la relación *habitar en*, que se puede establecer entre una persona y una ciudad, se halla en este orden. Sería posible incluso formular sin ningún reparo la proposición "Sócrates habita en Buenos Aires", aunque sepamos que es falsa.

Desde un punto ontológico, las primeras propiedades y relaciones con las que se puede contar lo son de individuos; *sin individuos*, la existencia de ellas quedaría sin sustento. Si las quisiésemos contemplar no como entidades ontológicas sino como lo que construye nuestro conocimiento, es evidente que las propiedades y relaciones son el resultado de un acto de abstracción que hemos realizado a partir de los individuos. Dicho de otro modo, las propiedades y relaciones no "preceden" a los individuos. Esta es una tesis filosófica, de raíz aristotélica, que podemos aceptar o no. Si alguien fuese platonista, no la aceptaría, pero sí lo haría quien tuviese una posición compatible con la de Russell en su teoría de los tipos.

Ahora necesitamos agregar un orden 2, en donde nos encontramos con las *propiedades de propiedades de orden 1*, siendo las propiedades de orden 1, como ya señalamos, las propiedades de los individuos que "habitan" el orden 0. Por ejemplo, podríamos predicar de la propiedad *ciudad* que es una propiedad concreta, en tanto que *par o impar* son propiedades abstractas (de números). Por consiguiente, la propiedad de ser propiedad concreta sería de orden 2, en tanto que la propiedad *ciudad* (orden 1) puede predicarse de Buenos Aires (orden 0). En el orden 2 no solamente tendremos las propiedades de propiedades de individuos sino también las propiedades de relaciones entre individuos e incluso también relaciones entre propiedades de individuos y relaciones entre relaciones de individuos. De este modo podemos agregar nuevos órdenes y así proseguir la construcción de los "pisos del edificio". Dado un orden n, podemos pasar a un nuevo orden $n + 1$, en el que aparecerán las propiedades y relaciones que se predican de (o que vinculan a) las entidades de orden n. Esta estratificación en órdenes es sin duda infinita, aunque es excepcional que en el lenguaje ordinario aparezcan palabras correspondientes a órdenes elevados, es decir, asociados a altos valores de n. Conviene aclarar que es perfectamente posible que una relación vincule entidades de órdenes distintos. Un ejemplo sería la relación *es*, que vincula individuos con predicados (propiedades) como en "Pedro es generoso". Por ello corresponde definir una relación como perteneciendo al orden $n + 1$ si al menos uno de los elementos relacionados es de orden n y el resto de los elementos de orden menor o igual a n. En nuestro ejemplo, *es* pertenece al orden 2.

Efectuada esta primera clasificación en órdenes, debemos referirnos a lo que se llama el *tipo* de una entidad determinada. Lo haremos por ahora de una manera incompleta porque aún carecemos de una tercera noción, la de *nivel*, que introduciremos más adelante, y que precisamente *ramifica* la teoría simple que hasta aquí estamos considerando. Dada una entidad determinada, su *tipo* está

dado a la vez por el *orden* al cual pertenece y por su *categoría* (propiedad, relación), de modo que, por ejemplo, las propiedades de individuos tienen un tipo que no se corresponde con el de las propiedades de propiedades, porque estas últimas se hallan en otro orden. Pero en un mismo orden las propiedades no tienen el mismo tipo que las relaciones, porque categorialmente una propiedad difiere de una relación. Ello permite hacer una clasificación de los tipos de entidades analizando: (1) en qué orden se encuentran; y (2) cuál es su categoría, como propiedad o relación. Es necesario volver a remarcar que los tipos que están en los órdenes superiores son siempre "posteriores" (en cuanto a su definición) a los que se hallan en los tipos más bajos.

Definido por caso el tipo de una propiedad, no tiene sentido predicarla de una entidad que corresponde a un orden igual o superior al de aquélla. En cambio, sí estamos autorizados a predicar propiedades acerca de tipos de orden inmediatamente inferior, pero únicamente en el caso de que se correspondan con su categoría. No podemos predicar una propiedad de individuos de una manera relacional, porque una relación no es una propiedad.

Hasta el momento, esta concepción de los tipos corresponde a la ya mencionada "teoría simple de los tipos", aunque Russell, en su teoría ramificada, propone algo más rico que lo que ofrece la simple, introduciendo, como ya señalamos, la noción de *nivel*. Pero ésta no es necesaria, por el momento, para comenzar a comprender de qué manera se pueden evitar ciertas antinomias. El punto clave es que en la teoría simple de los tipos no tiene sentido ni ontológica ni epistemológicamente predicar una propiedad de sí misma, porque se la estaría predicando, no de las entidades que están en el orden inmediatamente inferior, sino de ella misma. En las antinomias que nosotros hemos descrito, tanto las conjuntísticas como las que invocan propiedades, aparecen conjuntos o propiedades aplicándose a sí mismos. Cuando formulamos la antinomia de Russell nos preguntamos si "heterológico" es heterológico; este último término indica una propiedad y no puede aplicarse a sí mismo porque se estaría predicando algo acerca de una entidad del mismo orden. Las antinomias de Russell se desvanecen con la distinción de tipos, siempre que respetemos las indicaciones de que ningún tipo se puede aplicar a sí mismo ni de manera directa, si es una propiedad; y, si se trata de una relación, ninguno de los términos relacionados puede coincidir con la propia relación. No puede una relación, por ejemplo, relacionar algo consigo misma.

Se puede pensar, y esto se presenta de manera un tanto ambigua en las formulaciones de Russell, que la teoría de los tipos es una concepción ontológica de las entidades lógicas. Las entidades lógicas quedarían clasificadas en este "edificio" de órdenes y de categorías que hemos señalado. Lo que es interesante, sobre todo desde el punto de vista lingüístico, es que Russell se encuentra aquí con un problema totalmente original: que puede haber proposiciones gramaticalmente correctas que no tengan sentido desde el punto de vista lógico. El célebre ejemplo de Russell es "compatibilidad bebe dilación". Gramaticalmente

no ofrece ningún inconveniente, porque la frase tiene un sujeto, *compatibilidad*; un predicado, *dilación*, y además *bebe*, que a la vez forma parte del predicado pero que también tiene la función de establecer la cópula que vincula el sujeto con el predicado.

Ahora bien, lo que dice Russell es que aquí hay una confusión, porque en realidad *bebe*, entendido como verbo, es una relación diádica que vincula un individuo con algún líquido, y *compatibilidad*, entendida como propiedad, no es una propiedad de individuos sino de sistemas formales o de entidades lógicas, de manera que no podemos tomarlo como entidad a la que se aplica la relación *bebe*. Asimismo, *dilación* (demora) es una propiedad de procesos temporales y tampoco es un individuo sino una propiedad de individuos. Por consiguiente, en esta afirmación se están ignorando todas las precauciones que hay que tener en cuenta cuando se emplea la distinción de tipos, en particular la de no emplear un término de determinado tipo salvo en el caso en que no se violen las distinciones de órdenes y categorías. Una propiedad sólo puede ser aplicada a las entidades que están inmediatamente en el orden inferior. En síntesis, en nuestro ejemplo "compatibilidad bebe dilación", una relación se ha aplicado a entidades de orden superior o igual a las de ella misma; por tanto, se ha cometido un absurdo y la proposición no tiene sentido. La consecuencia de la teoría los tipos de Russell es que hay en principio una cantidad enorme de afirmaciones que gramaticalmente parecen tener sentido, pero que desde la perspectiva lógica no la tienen.

Todo ello tiene una serie de implicancias para la filosofía de la ciencia y para la filosofía del conocimiento en general. Supongamos que nos preguntásemos por ejemplo: "¿es valiente el número 8?". La afirmación de que el número 8 es valiente no ofrece objeciones desde el punto de vista gramatical y la tentación es responder la pregunta diciendo que *no lo es*, porque entre las propiedades del número 8 no figura la valentía. Sin embargo, esta respuesta nos genera cierta inquietud, porque decir que el número 8 no es valiente podría entenderse como que es cobarde, algo que resulta tan sorprendente como preguntarse si es valiente. Pero veamos esta curiosa situación con los ojos de la teoría de los tipos de Russell. *Valiente* es una propiedad de ciertos individuos, los seres humanos y quizá de los animales. Ahora bien, el número 8 no es un individuo. Los números sirven para clasificar conjuntos; por ejemplo, como ya señalamos anteriormente, el número 12 permite clasificar conjuntos entre los que son docenas y los que no son docenas. En este sentido los números se hallan por lo menos en el orden 2, mientras que *valiente* es una propiedad de orden 1 y no podemos aplicar, por la teoría de los tipos, una propiedad de orden 1 a una propiedad de orden 2. Por consiguiente la pregunta acerca de si el número 8 es valiente (o no) carece de sentido.

Analicemos otro ejemplo menos obvio, a partir de la siguiente pregunta: "¿Julio César era un número primo?". La contestación sería en principio *no*, porque Julio César ni siquiera era un número. Pero nuevamente advertimos cierto

absurdo en esa pregunta, lo cual no nos ocurriría en el caso de preguntarnos si Julio César era inteligente o si era valiente. Analicemos entonces lo que todo ello implica de acuerdo con la teoría de los tipos. "Julio César" es un individuo, "número primo" es una propiedad de números, y, si se acepta que los números están en el orden 2, "número primo" se halla en el orden 3, y no podemos predicar una propiedad de orden 3 de aquello que está en el orden 0. Si esto es así, tampoco tiene sentido "Julio César es un número primo".

Lo que quiere insinuar Russell aquí es que puede haber muchos problemas filosóficos que, analizados de acuerdo con la teoría de los tipos, llevan a sinsentidos. Tomemos como ejemplo una vieja y querida pregunta de la metafísica que proviene de la época de Aristóteles: "¿El ser es?". Supongamos que la respuesta fuera afirmativa, es decir, "el ser es". Desde la perspectiva de la teoría de los tipos se la rechazaría inmediatamente como carente de sentido porque "es" representa la cópula (como en "Juancito es amable"), y por consiguiente es una relación que vincula individuos con predicados, con lo cual estaría al menos en el orden 2. Siendo así, se advierte que se comete el error de interpretar lo que debería ser una relación como si fuese un predicado (monádico). En cuanto al sujeto, "el ser", se produce el mismo malentendido, puesto que la categoría de "ser" es la de relación, y no puede aparecer con categoría de individuo o de término singular. Por consiguiente, "el ser *es*" es un enunciado que viola la teoría de los tipos y que no tiene sentido porque presenta una inadmisible confusión entre categorías.

Aquí se comprende lo que han sostenido los filósofos de la escuela analítica, así como los empiristas o positivistas lógicos: ante un enunciado que expresa un problema filosófico, hay que analizar en primer lugar si dicho enunciado tiene sentido a la luz de la teoría de los tipos. Si no lo tiene, el problema no existe, y ha quedado, como ellos afirman, *disuelto*. Encontramos este punto de vista en la obra temprana del gran filósofo austriaco Ludwig Wittgenstein (1889-1951), quien influyó en el surgimiento y desarrollo del empirismo lógico. Uno de los representantes de esta postura filosófica, Rudolf Carnap (a quien ya hemos citado anteriormente) analizó una expresión del filósofo existencialista Martin Heidegger, "la nada anonada", para mostrar que también en este caso se viola la teoría de los tipos y que por consiguiente el enunciado carece de sentido.

Pero desde el punto de vista filosófico se nos presenta aquí una duda fundamental. Hemos empleado el lenguaje ordinario para exponer la teoría de los tipos de Russell, y en particular hemos introducido *categorías*, *órdenes* y *tipos*, acerca de los cuales es posible formular estas indiscretas preguntas: "¿cuál es el tipo de la palabra 'orden'?" y "¿cuál es el tipo de la palabra 'tipo'?". Es imposible contestar las preguntas, porque la palabra "tipo" parece estar en un estrato posterior a todo aquello a lo que se refiere la teoría de los tipos, lo cual plantea la cuestión de que, al fin de cuentas, en lógica y de una manera ineludible, hay que emplear palabras que escapan a las restricciones sobre tipos. Ésta es una objeción bastante seria a la formulación de Bertrand Russell acerca de có-

mo es la lógica del lenguaje (o de las entidades, siempre que admitamos que la teoría de los tipos, más que clasificar palabras, clasifica entidades).

La teoría ramificada de los tipos

Ya hemos señalado que, tal como estamos empleando la palabra "tipo", nuestra caracterización se refiere a una formulación simple de la teoría de Russell. Pero la teoría de éste, tal como se la puede encontrar en los *Principia Mathematica*, es una teoría ramificada, y en algunos aspectos, si bien aborda las mismas cuestiones que la teoría simple, presenta más problemas de los que en principio podríamos imaginar. ¿Qué es una teoría ramificada? Una primera aclaración es que Russell retoma la cuestión planteada por el problema del principio del círculo vicioso que mencionamos anteriormente. Advierte que aun en el tipo 1 es necesario hacer todavía una distinción más acerca de los tipos. Consideremos por ejemplo las propiedades de los individuos. Hay propiedades de individuos tales que para su formulación necesitamos tener los individuos y clasificarlos; así, por caso, la propiedad "inteligente" clasifica a los individuos según cierta clase de característica psicológica y ella será, dentro del orden 1, lo que pudiéramos llamar una *propiedad básica*. Pero puede haber propiedades que, para ser definidas como propiedades de individuos, necesiten tener ya en su definición una determinada propiedad de individuos. Analicemos un "caso didáctico", original de Russell. Supongamos que queremos definir un "inglés típico". Ésta es una propiedad de individuos (orden 1), ya que los ingleses (orden 0) podrían ser clasificados en ingleses típicos e ingleses no típicos. Pero, ¿cómo definimos qué es un inglés típico? Habría que contemplar todas las propiedades que tienen la mayoría de los ingleses, tales como las de fumar en pipa, ser flemáticos, ser colonialistas, tomar cerveza en los *pubs* y llamar Falkland Islands a las islas Malvinas. Es decir, tenemos que considerar en primer lugar las propiedades que los ingleses pueden tener mayoritariamente para poder preguntarnos, frente a un inglés, si tiene o no esas propiedades. Evidentemente, no podemos preguntarnos si un inglés típico tiene la propiedad de ser un inglés típico. "Inglés típico" es una propiedad de orden 1, pero para poder ser generada necesitamos tener ciertas propiedades básicas y entonces Russell *divide* los distintos órdenes, jerarquizándolos en los ya mencionados *niveles*. Por caso, la propiedad "inteligente" es de nivel 1, pero "inglés típico" es de nivel 2, aunque ambas sean de orden 1. Esta jerarquización de cada orden es la que justifica la designación de "ramificada" a la teoría de Russell.

Para aclarar más esta noción, advirtamos que, a su vez, podría aparecer en el orden 1 un nivel 3, donde hallaríamos aquellas propiedades que nos obligarían, para caracterizarlas, a recorrer todas las propiedades de nivel análogo al del "inglés típico". Podríamos hablar, en el nivel 3, de las propiedades de un "inglés supertípico". ¿Qué sería un inglés supertípico? El que tiene la mayoría de las propiedades (aunque no todas) del tipo "inglés típico", que es de nivel 2.

Tal vez el inglés supertípico no será un "fumador en pipa típico" (quizás no fume) pero seguramente llamará Falkland Islands a las islas Malvinas. Como el lector puede advertir, ello produce una ramificación mucho mayor que la que ya teníamos, porque además de los órdenes y las categorías hay que hacer una distinción de niveles. De manera que ahora las categorías se han hecho realmente muy abigarradas. Sin embargo, sigue siendo interesante una afirmación de Russell a propósito de lo siguiente: se puede sostener filosóficamente que el engendrar un nivel superior implica siempre un paso de abstracción, pues cuando avanzamos de un nivel n a un nivel $n+1$ estamos haciendo la abstracción que implica conocer las propiedades del nivel inferior n.

A manera de síntesis, señalemos en primer lugar que la solución que ofrece Russell a las antinomias consiste en mostrar que, como problemas, implican una violación a la teoría ramificada de los tipos. En segundo lugar, la teoría ramificada de los tipos ofrece una visión *genética* de las propiedades y de las relaciones que ramifica, dando lugar a infinitas clases de términos o de entidades. En tercer lugar, todo ello nos conduce a las teorías semióticas de la lógica, porque la resolución de las antinomias obliga a declarar *sin sentido* a ciertas locuciones del discurso. Por ello la solución que ofrece la teoría ramificada de los tipos, a diferencia de la teoría simple, se ubica entre las soluciones a las antinomias lingüísticas y no solamente a las de las antinomias lógicas.

Dificultades de la teoría de los tipos

Sin embargo, surgen una serie de problemas con la teoría de los tipos. De la reducción que hace Russell del formalismo de los números naturales a la teoría de conjuntos se desprende que la matemática forma parte de esta teoría. Pero hay cierta dificultad bastante complicada a la hora de obtener la matemática habitual en la teoría de los tipos. Ilustrémoslo con un ejemplo. ¿Qué son los números? Señalábamos anteriormente que en primera instancia son propiedades de orden 2, es decir, propiedades de conjuntos de individuos. "12" querría decir "docena" y cuando decimos que un conjunto es o no una docena estamos clasificando tal conjunto de individuos entre los que son docenas y los que no lo son. Pero, ¿qué pasaría si tuviésemos que contar, no ya individuos sino propiedades? Podríamos tomar en consideración 12 propiedades. ¿Qué es este número 12? Es una clasificación para ese conjunto de propiedades; y es este determinado conjunto de propiedades el que clasificamos como una docena. Para cada orden $n+2$ hay números que clasifican los conjuntos de orden $n+1$ de entidades de orden n. Por consiguiente en cada orden hay números naturales de distintos tipos.

Esto es alarmante, porque significa que hay números que tienen tipos diferentes a pesar de ser, en cierto sentido, el mismo número. En materia de números naturales, habría un número 12 para el orden 2, y también para el orden 3, para el orden 4, para el orden 5 y así sucesivamente. Pero no podemos "mez-

clar" órdenes. No podemos decir, por ejemplo, que el número 2 del orden 2 es menor que el número 4 del orden 3: estaríamos "mezclando" tipos. Por consiguiente, un problema que se le presenta a Russell es que en lugar de tener *una* aritmética tendríamos tantas aritméticas como órdenes.

¿Qué hace Russell sobre este particular? Propone una solución ingeniosa pero no demasiado convincente. Afirma que el discurso aritmético, en especial el decir por ejemplo "2 + 3 = 5", es algo que se puede repetir en cada orden, aunque hablando de números de tipos distintos. Este discurso podría desarrollarse a través de lo que él llama *ambigüedad sistemática*. "2 + 3 = 5" se puede interpretar como que estamos hablando en algún orden especial, pero sea cual fuere, la aritmética sería un discurso ambiguo en el que cada vez que queremos hablar con precisión tendríamos que indicar en qué orden lo estamos haciendo. La ambigüedad sistemática es una especie de solución diplomática según la cual hablamos sin especificar nada que sea no habitual desde el punto de vista aritmético, pero se supone que cuando es necesario proceder con mayor rigor hay que indicar cuál es el orden en el que nos hallamos. A todas luces, esta propuesta resulta insatisfactoria.

Esta noción de "ambigüedad sistemática" es un tanto excéntrica, no obstante lo cual merece cierta atención por parte de quienes se dedican a la metodología de los sistemas axiomáticos. Efectivamente, con el auxilio de ella se puede ofrecer una interpretación distinta acerca de *qué es* un sistema de esa naturaleza. En lugar de concebir al sistema como desprovisto de significado, que admite potencialmente interpretaciones y aun modelos, podría pensarse que su discurso habla seriamente sobre entidades, sólo que éstas son entendidas con "ambigüedad sistemática". Lo que se quiere decir es que se están mencionando entidades y objetos, pero en forma ambigua, pudiéndose hablar con toda precisión si entendemos que nos referimos a una interpretación determinada. En tanto ello no se haga, la idea sería totalmente análoga a la de Russell: así como para él en aritmética queda indeterminada la denotación de los términos por la ambigüedad que implica ignorar acerca de qué orden estamos hablando, en nuestro caso el discurso del sistema axiomático queda ambiguamente indeterminado en cuanto a qué especial interpretación nos referimos. Analizar la cuestión de esta manera tiene la ventaja de que nos acercamos más a la idea que puede tener un docente acerca de que, al fin de cuentas, en matemática pura estamos hablando acerca de *algo* (lo que obligaría a cambiar la respuesta a la primera de nuestras cuatro preguntas sobre el discurso matemático). Sin duda, ésta es una propuesta metodológicamente interesante, sólo que por el momento no la hemos adoptado porque no está claro cómo estaría constituida la semántica de la ambigüedad sistemática, tema del que, curiosamente, nadie se ha ocupado, ni siquiera el propio Russell. En particular, no sabemos cuándo una cuasiproposición, entendida como proposición con ambigüedad, puede considerarse verdadera. ¿Cuándo es un teorema? ¿Cuándo es verdadera en todos los modelos? Todo ello sugiere una línea de investigación que no ha sido explorada.

Por otra parte, no resulta evidente que todo aquello que la matemática necesita para su fundamentación pueda ser obtenido con la teoría de los tipos, ya se trate de la teoría simple o la ramificada. En las definiciones necesarias para constituir el modelo de Russell, señalando por caso cuáles son los conjuntos inductivos, dado que hay dificultades con la teoría de los tipos no es posible definir inequívocamente los números naturales. Russell se ve obligado, particularmente en la teoría ramificada, a introducir ciertos principios, por ejemplo el muy dudoso *axioma de reductibilidad*. Lo que afirma este axioma es que para toda propiedad de nivel *n* existe en el mismo orden una propiedad de nivel 1 que se aplica a los mismos individuos.

Ahora bien, no parece obligatorio aceptar una afirmación como la del principio de reductibilidad, con la que efectivamente puede reconstruirse gran parte de la aritmética, pues es posible que reaparezcan las antinomias de una manera oculta. El peligro radica en que lo que se dice en un tipo se puede transferir a otros tipos usando este principio, y no sabemos si finalmente no acontecerán las repeticiones, redundancias y autoaplicaciones que encontramos en las antinomias. En una palabra, no está demostrado que el axioma de reductibilidad no lleva a inconsistencias. Por ello son preferibles las teorías simples de los tipos, que no aceptan ramificaciones y que tan solo admiten órdenes y categorías.

La teoría de los tipos de Russell se formula desde una posición logicista y no supone mayores alteraciones de la lógica, salvo por el agregado de postulados adicionales como el axioma de reductibilidad o el llamado "axioma del infinito" (que afirma la existencia de infinitos elementos). En esta situación, todavía se podría reconstruir la matemática a partir de la lógica. En lugar de aceptar conjuntos de una manera "liberal", haciendo corresponder a cualquier característica o propiedad el conjunto de los elementos que las satisfacen, y siguiendo la idea expresada por la teoría simple de los tipos, podríamos someter a los conjuntos a las mismas restricciones a las que antes sometimos a las entidades lógicas. (Ello ocurre en algunas formulaciones de la teoría de conjuntos.) De esta manera, los conjuntos quedarían también subordinados a restricciones de tipos; sería posible, por ejemplo, formar conjuntos de individuos, conjuntos de conjuntos de individuos, etcétera, pero no conjuntos mixtos de elementos "mezclados" con clases de individuos.

De cualquier manera, una de las características principales de la solución de Russell que merece ser tenida en cuenta por sus consecuencias filosóficas es que los fundamentadores de la matemática, y en general los epistemólogos, deberían atender al significado de las expresiones científicas, por cuanto podrían en apariencia estar bien construidas gramaticalmente pero no tener sentido. La teoría de los tipos establece una restricción en cuanto al significado que puedan o no tener los enunciados. De hecho, la prohibición de que haya propiedades que se puedan aplicar indistintamente a individuos y propiedades no tiene un carácter meramente lógico, sino que afecta a la filosofía por entero. Si se viola tal prohibición, se obtendrán enunciados filosóficos absurdos. Y ello es intere-

sante por cuanto se puede comprobar que muchas afirmaciones de la filosofía, que parecen tener sentido y por consiguiente plantear un problema, son en realidad sinsentidos desde el punto de vista lingüístico.

Como ya señalamos al comienzo de este capítulo, luego de la preocupante aparición de las antinomias se trató de encontrar diversas soluciones a las mismas, y la teoría de los tipos fue una de ellas. Nos interesa ahora considerar una segunda, vinculada con la posición filosófica llamada *neointuicionismo matemático*.

El neointuicionismo matemático

El neointuicionismo matemático (o simplemente neointuicionismo) tuvo su mayor representante fundacional en la figura del matemático y filósofo holandés Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966). Nacido en Overschie, ciudad cercana a Rotterdam, fue profesor en la Universidad de Amsterdam desde 1912 hasta 1956. Murió en la ciudad holandesa de Blaricum. Se le deben importantes contribuciones, particularmente a la topología, pero su fama radica principalmente en su particular concepción de la fundamentación y de la filosofía de la matemática. El neointuicionismo brouweriano propone una estrategia según la cual se pueden evitar las antinomias modificando algunos principios lógicos. Por ejemplo, en la antinomia de Russell de los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos, si admitimos el principio de tercero excluido tenemos que suponer que, dado un conjunto, se contiene a sí mismo como elemento o no se contiene a sí mismo como elemento, y no existe otra posibilidad. Si en cambio *no* aceptáramos dicho principio podríamos decir de un conjunto que (a) se contiene a sí mismo, o (b) no se contiene a sí mismo, o bien (c) se encuentra en un tercer estado, indeterminado[2].

Desde un comienzo debemos señalar que la estrategia mencionada resulta a la postre ineficaz porque, si bien se evitan las antinomias lógicas usuales, provoca a su vez la aparición de otras. Por otra parte, los neointucionistas no propusieron sus tesis con el objeto específico de evitar las antinomias, sino que en realidad sostuvieron algunas posiciones generales de carácter filosófico acerca de la naturaleza de la matemática y de la lógica. A partir de ellas, concluyeron que no se podían admitir algunos de los principios lógicos tradicionales, lo cual impediría la aparición de antinomias. En cierto modo estos pensadores son una especie peculiar de neokantianos, aunque en sus exposiciones no encontraremos

2 Cabe señalar que esta idea de descartar algunos principios lógicos no fue exclusiva de los neointuicionistas sino también de otros lógicos como el polaco Jan Lukasiewicz, con sus llamadas "lógicas polivalentes", y por Frederic Brenton Fitch cuando diseña su sistema de lógica matemática.

un apoyo explícito en las ideas de Kant, pues sostienen posiciones epistemológicas kantianas junto con otras que se vinculan con una concepción peculiar acerca de lo que podríamos llamar el *contenido psicológico* de la construcción de la matemática.

Fueron muchos quienes adoptaron esta orientación acerca de la matemática y no podemos citarlos a todos. Pero destaquemos los nombres de dos precursores. El primero es el de Henri Poincaré, a quien hemos mencionado a propósito de la teoría de los tipos, quien fue también un precursor de las ideas neointuicionistas. El segundo nombre vinculado con ellas es el de Leopold Kronecker, a quien destacábamos en el Capítulo 10 como opositor a la teoría de conjuntos de Cantor. A Kronecker, la idea de que existen conjuntos o conjuntos de conjuntos, y de que ellos existen como entidades ontológicas dadas, le parecía una forma de platonismo inaceptable. A su juicio, la aritmética, y en particular la de los números naturales, resulta de un acto de intuición irreductible a otras intuiciones anteriores. Esta posición se refleja efectivamente en los neointuicionistas como Brouwer, quien la asumió ya en su tesis doctoral de 1907, *Sobre la fundamentación de la matemática*, y en muchos trabajos posteriores.

Analicemos someramente en qué consisten algunas de las posturas filosóficas de Brouwer y de su discípulo y colega, también holandés, Arend Heyting. Se trata en gran medida de una tesis psicologista, a la que adhirió el notable matemático y físico alemán Hermann Weyl (1885-1955), quien simpatizó notoriamente con este punto de vista. Weyl hizo no sólo importantes contribuciones a la matemática sino también a la teoría cuántica y a la teoría de la relatividad. Nacido en Elmshorn, estudió con Hilbert y fue luego profesor en el Politécnico de Zurich y en la Universidad de Gotinga. Abandonó la Alemania nazi en 1933 y prosiguió su carrera en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, Nueva Jersey, donde colaboró con Einstein. Falleció en Zurich.

La concepción fundamental de Brouwer y sus seguidores, como señalamos, es que la matemática no es una teoría ontológica sobre entidades ya dadas, sino que se refiere a cómo construimos nuestros conceptos matemáticos. Lo primero que intenta hacer el neointuicionista es comprender de qué modo surge en nosotros la noción de número natural. A propósito de éstos, Brouwer sostiene lo siguiente: generar números naturales es un proceso que consiste en "poner atención" o "captar" (intuir) un primer objeto del pensamiento y aplicar luego una operación ("siguiente") que en cada paso produzca un objeto nuevo a partir de los ya obtenidos, lo cual implica una *construcción*. De modo que el "objeto aritmético" es un "objeto de pensamiento" mientras que "siguiente" sería una operación mental que nos permite obtener, a partir de un objeto ya captado, un nuevo objeto. Se acepta entonces que tenemos la facultad lógica y psicológica de distinguir objetos distintos del objeto inicial y de los ya obtenidos. Brouwer sostiene que lo único que interesa es que pongamos atención en dicho objeto inicial y que sepamos cómo obtener un nuevo objeto a partir de los anteriores; de esa manera los números naturales son siempre "recreados". Lo fun-

damental en este proceso de generar números es el *proceso mismo* y no los números que se obtienen por etapas sucesivas.

Suponiendo que esta operación se repita y que, habiendo llegado a captar un determinado objeto pasamos a otro objeto, nuevo, distinto del anterior, que no coincide con ninguno de los ya obtenidos, diremos que hemos transitado desde el número al cual habíamos llegado hacia el *siguiente* de dicho número. De esta manera se obtiene 1 como siguiente de 0, 2 como siguiente de 1, 3 como siguiente de 2, 4 como siguiente de 3 y en general $n+1$ como siguiente de n. Ello implica, reiteramos, que $n+1$, en el que ponemos atención, es un objeto nuevo y distinto a 1, 2, 3, ... n. El número natural es, en este sentido, una *construcción*, y la serie de números naturales no es más que el proceso resultante de nuestra actitud potencial de poder continuar realizándola indefinidamente.

La posición neointuicionista con respecto a los números naturales se opone frontalmente a la logicista, para la cual se deriva el número por medio de construcciones explícitas a partir de nociones lógicas. Esto no es posible para los neointuicionistas, en el sentido de que no hay nada más simple que los números naturales, los que se obtienen mediante la construcción "psicológica" descrita. Para cualquier operación lógica que tengamos que emplear en matemática debemos estar ya en posesión de los números naturales. No hay nada más sencillo que tales números y, desde el punto de vista del neointuicionismo que estamos describiendo, el número natural es una suerte de "reflejo" de las operaciones más sencillas y primitivas de nuestro pensamiento. A partir de ellas, derivarán muchas otras, y en particular también la lógica. Insistimos en que, de acuerdo con esta perspectiva, no es posible derivar la aritmética a partir de la construcción de estructuras lógicas.

Ya hemos adelantado la tesis de los neointuicionistas de que no existen conjuntos dados de antemano a la manera de "objetos"; por ejemplo, el conjunto de los números naturales no existe como un conjunto platónico que los contiene a todos ellos. En realidad, si se quiere seguir hablando de conjuntos, debemos pensar que el conjunto de los números naturales es un proceso indefinido en el cual, a partir de un objeto inicial, el *cero*, se van construyendo todos los demás números. De acuerdo con ello, los conjuntos como el de los números naturales y, en general, los conjuntos infinitos, son más bien *procesos* en los que a partir de objetos iniciales se van obteniendo nuevos objetos. Este punto de vista es radicalmente distinto del que sostuviera Cantor, cuya posición podría identificarse con el generalmente denominado *realismo matemático*, en el que se acepta que los enunciados matemáticos se refieren a entidades que existen de antemano más allá de la actividad del matemático. Desde luego, la "realidad" de tales entidades no puede ser la de los objetos espaciotemporales, sino cierta realidad *sui generis* de carácter platónico. En el siglo XX, tal concepción fue adoptada por Kurt Gödel, de cuya obra nos ocuparemos más adelante, en la segunda mitad de su vida.

Observemos que las ideas cantorianas sobre los conjuntos infinitos que tienen distinto número cardinal no podrían replicarse desde el punto de vista del

neointuicionismo. Efectivamente, los conjuntos infinitos se obtendrían de una manera semejante por medio de procesos, por etapas, a partir de objetos iniciales, y no podríamos hablar de un conjunto infinito dado de antemano al que pudiésemos asignar un determinado número cardinal. En cierto modo esto explica la importancia que le han dado los neointuicionistas a la idea de inducción matemática que hemos descrito en el Capítulo 13.

Conviene puntualizar que los matemáticos denominan "definición por inducción" de una operación o propiedad de los números naturales a un método por el cual se comienza indicando cuál es el resultado de la operación o la existencia de la propiedad para el número *cero* (base de la inducción); y luego, suponiendo que hayamos establecido el resultado de la operación o la naturaleza de la propiedad para un número natural cualquiera n indicamos cómo sería el resultado de la misma para el siguiente de n (o sea $n+1$) o la naturaleza de la propiedad para $n+1$ (etapa inductiva). A su vez, las llamadas "demostraciones por inducción" resultan del quinto axioma de Peano, si admitimos que éste permite demostrar teoremas que se cumplen para *todos* los números naturales, mostrando que el teorema vale para *cero* y que si vale para algún n cualquiera debe cumplirse también para $n+1$. De modo que, en realidad, para un neointuicionista la definición por inducción coincidiría con la definición del proceso constructivo. Análogamente, la demostración por inducción sería una manera de establecer que una propiedad que se cumple para el número *cero* se conserva para todos los números naturales que vamos construyendo por medio de la operación "siguiente".

El principio de inducción matemática parece ser uno de los principios claves en los que se sustenta el pensamiento humano. El primero que vislumbró esta idea fue Poincaré, ya que a su entender dicho principio es un principio sintético *a priori*, en el sentido en que Kant empleaba esta palabra, precisamente a la inversa de Russell, quien sostenía la posibilidad de demostrarlo a partir de su definición conjuntistica de "número natural". Afirmar que se trata de un principio *a priori* significa que lo captamos con toda evidencia previamente a toda operación empírica que hagamos con nuestro pensamiento. En este punto podemos advertir la analogía que tienen las tesis neointuicionistas con ciertos aspectos del pensamiento kantiano.

Lo cual tiene algunas consecuencias inesperadas a propósito de la fundamentación de la matemática. Consideremos por caso la teoría de los números reales. Es sabido que todo número real, racional o irracional, admite una expresión en notación decimal en la cual tenemos una parte entera, antes de la coma, y una serie finita o infinita de dígitos después de ella (parte decimal). En particular, los números *racionales* admiten no una sino dos expresiones en notación decimal, una finita y otra infinita, en la que hay una parte (el período) que se repite indefinidamente. Más aún, hay números racionales que sólo pueden ser expresados de este modo. En cambio, los números irracionales sólo admiten

una expresión decimal infinita, pero esta vez sin la existencia de un período. Señalemos algunos ejemplos:

3/2 = 1,5 (parte decimal finita)

18/11 = 1,**63**6363636363... (parte decimal infinita periódica, en la que el período **63** comienza inmediatamente después de la coma)

33/21 = 1,57**142857**142857142857142857142857... (parte decimal infinita periódica, en la que el período **142857** no comienza inmediatamente después de la coma sino luego de **57**)

Todo ello es característico de los números racionales, expresables por medio de una razón de números enteros. En cambio, la expresión decimal de los irracionales, como $\sqrt{2}$ o π, si bien es también infinita, carece de período. Por caso, la parte entera de π es 3, y luego de la coma encontramos:

1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128
4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196
4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091
4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273...

El lector puede comprobar que no se advierte la existencia de un período en la expresión decimal de π, si bien se puede preguntar: "¿cómo sabemos que el período no aparecerá al considerar más y más dígitos de la parte decimal?". A ello podemos responder que los matemáticos han demostrado que tal cosa *no puede suceder*, puesto que, si el desarrollo decimal de π incluyese un período, este número sería racional. Dicho de otro modo, su parte decimal es una sucesión de dígitos, infinita y no periódica[3].

Ahora bien, un neointuicionista afirmaría que, para cada lugar n ocupado por un dígito es necesario indicar un proceso constructivo que nos permita obtener el dígito que corresponde al lugar $n + 1$. Por consiguiente, la definición del número irracional supondría una serie (infinita) de pasos por medio de los cuales se obtendrían números racionales cada vez mayores, tales como:

3 Actualmente, con el auxilio de computadoras, se han calculado 1 421 000 000 000 cifras decimales de π. Los detalles técnicos de este hallazgo, obtenido por el matemático Yasumasa Kanada y sus colaboradores de la Universidad de Tokio se pueden encontrar en la página web http://www.sciencenews.org/articles/20021214/mathtrek.asp y en muchas otras destinadas a exponer diversas propiedades del célebre número y curiosidades a propósito del mismo.

3,1
3,14
3,141
3,1415
3,14159
3,141592
3,1415926

y así siguiendo.

Este proceso define tradicionalmente un número real por medio de sucesiones de dígitos que se "alejan" cada vez más de la coma, pero no se puede negar que se trata de una forma muy complicada de construir tales números. Lo fundamental es que un número irracional, así considerado, no es una "totalidad" ya dada de todos sus dígitos sino más bien un proceso de construcción indefinido.

Ya señalamos que los neointuicionistas rechazan la idea cantoriana (platónica) según la cual los conjuntos, finitos o infinitos, son objetos formales ya dados, independientes de nuestra mente. ¿De qué manera se refleja todo ello en nuestra aceptación o no de los principios lógicos tradicionales? Un neointuicionista no aceptaría la existencia del conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos porque la definición de Russell de tal conjunto no es una definición constructiva, es decir, no puede ser definido a partir de un objeto inicial y nuevos elementos obtenidos por medio de sucesivas etapas. De modo que la antinomia de Russell, desde el punto de vista neointuicionista, desaparece simplemente porque lo que se está diciendo no corresponde a la concepción constructivista de los conjuntos. Y como analizaremos a continuación, todo ello, inesperadamente, origina el problema de si debemos aceptar o no el principio de tercero excluido.

Para desarrollar este punto, una cuestión que debe resolver previamente el neointuicionista es la de la "verdad" y la "falsedad". Ante una proposición, su verdad estará relacionada con la posibilidad de disponer de métodos constructivos para aquello que se afirma en la misma. Pero la falsedad de la proposición no se puede definir simplemente como la "ausencia de la verdad" sino también por medio de un método constructivo y ello equivale a mostrar que la proposición *lleva a contradicción*. Supongamos la siguiente proposición: "en el desarrollo decimal del número π existen diez dígitos 7 consecutivos". ¿Cómo decidir si es verdadera o falsa? Un platonista diría que es verdadera si tales dígitos consecutivos existen y que es falsa en caso contrario. Pero el neointuicionista replicaría que la verdad de una afirmación como la anterior obliga a una construcción explícita para mostrar que las diez cifras consecutivas 7 realmente existen. En cuanto a la falsedad, el neointuicionista diría que, si se acepta la proposición que afirma la existencia de las diez cifras 7 consecutivas, se arribará finalmente a una contradicción. En síntesis, para el neointuicionismo, la verdad implica

la construcción de la existencia de las diez cifras 7 consecutivas y la falsedad la de una contradicción a partir de la suposición de que tales cifras existen.

Si con p simbolizamos la proposición que estamos considerando, es evidente que la verdad de p implica una construcción y la verdad de $\sim p$ implica otra. Ahora bien, se comprende por qué los neointuicionistas suponen que no es necesario aceptar el principio de tercero excluido: no hay ninguna razón por la cual, dada una proposición p, su verdad sea construible o bien lo sea su falsedad. Volviendo a nuestro ejemplo anterior, podría ocurrir que no se encontrasen diez cifras 7 consecutivas en el desarrollo de π o que no haya manera de construirlas, y por otra parte que no haya construcción de la contradicción. En tal caso, la proposición estaría en un "tercer estado" distinto de la verdad o la falsedad, en estado indeterminado. Si es así, no hay ninguna razón para aceptar el principio de tercero excluido, lo cual también implica que no es necesario admitir otro principio lógico, el llamado *de doble negación*. Éste afirma simplemente que la negación de la negación de p es p. En la lógica clásica, el principio de doble negación es una consecuencia casi inmediata del principio de tercero excluido, porque si se niega la falsedad de una proposición sólo queda afirmar –según el principio– que ella es verdadera. Pero tal cosa no es así para los neointuicionistas, porque significa que, si se acepta la negación de la negación de p, esto involucraría que la suposición de que p lleva a contradicción lleva a su vez a contradicción. Sin embargo, puede suceder perfectamente que ello ocurra sin que se derive de allí un método constructivo para mostrar que tenemos que aceptar p. En particular podría suceder por ejemplo que la suposición de que hay diez cifras 7 consecutivas en el número π lleva a una contradicción conduce a su vez a una contradicción, pero tal cosa no proporciona un método constructivo para encontrar dichas cifras o para saber hasta dónde habría que avanzar en la secuencia de dígitos para obtenerlas. Por consiguiente, en la lógica neointuicionista, la negación de la negación de p no implica necesariamente p.

Para un neointuicionista tampoco es válido el método de demostración por el absurdo. En la lógica clásica, mostrar que $\sim p$ lleva a una contradicción (el "absurdo") basta para justificar p. Pero repitiendo lo anteriormente señalado, el neointuicionista aduciría que la derivación de una contradicción a partir de $\sim p$ no es suficiente para justificar que haya una construcción efectiva de lo afirmado por p. Hay también, en la utilización de los cuantificadores, una dificultad análoga. Según la lógica clásica, $\sim[(\forall x) \sim f(x)]$ es equivalente a afirmar $\exists x f(x)$. Dicho en lenguaje ordinario: la afirmación (entre corchetes) de que todos los x satisfacen la negación de una propiedad $f(x)$ equivale a afirmar que ningún x la satisface, y si se *niega* esta última afirmación estamos diciendo que existe al menos un x que la cumple. Sin embargo, para los neointuicionistas ello no es así, porque afirmar $\sim[\forall(x) \sim f(x)]$ entraña mostrar que esta expresión implica una contradicción. Lo cual en modo alguno equivale a afirmar $\exists x f(x)$, ya que tal cosa, a su vez, implicaría poder construir un ejemplo de entidad matemática que satisficiera la condición $f(x)$.

El neointuicionismo acepta el principio de no contradicción, en el sentido de que no puede acaecer a la vez p y $\sim p$; si a una cierta creencia expresada por p le ocurre esto, dicha creencia sería un absurdo evidentemente inaceptable. Lo que no se admite es el principio de tercero excluido y los principios relacionados con él, como el de doble negación. De esta manera la lógica se "debilita" y por ello faltan instrumentos para construir ciertos razonamientos. Los neointuicionistas sostienen que precisamente por ello nunca obtendremos antinomias lógicas. Éstas provienen de admitir la existencia de instrumentos lógicos demasiados "fuertes", que de acuerdo con el pensamiento neointuicionista no son legítimos. Tal es, en síntesis, la solución que esta corriente aporta al problema de las antinomias.

Dificultades del neointuicionismo

Hermann Weyl advirtió que si debilitamos los principios lógicos no sólo desaparecen las antinomias sino que lo mismo sucede con una serie de importantes teoremas matemáticos. En particular, existe un célebre teorema del propio Brouwer, llamado "del punto fijo", que tiene aplicaciones a la hidrodinámica y a la cosmología, y que en la matemática neointuicionista *no* se puede demostrar pues faltan las inferencias necesarias para establecerlo. Es un hecho curioso: el creador de una teoría de fundamentación de la matemática debe admitir que un teorema que él mismo demostró como matemático no se puede reconstruir epistemológicamente en el seno de dicha teoría. Ante estos problemas, Weyl sugirió que hay dos tipos de matemática. Por una parte, la matemática pura, de tipo "psicologista", que admite una fundamentación mínima, y que correspondería al punto de vista del neointuicionismo. En cierto modo, ésta es una teoría acerca de cómo debemos pensar si queremos ser exactos y prudentes. Por otra parte, existiría la matemática aplicada, en la que deberán ser admitidos, quizás con un sentido puramente instrumental, algunos principios y procedimientos de inferencia más "fuertes". Ello se debe a que los físicos, en particular, necesitan una matemática muy potente y no les alcanza con la matemática restringida que puede fundamentar el neointuicionismo.

Para Weyl, tenemos la intuición del continuo de los números reales, que semeja bastante a la intuición del conjunto de los puntos de la recta. Si se lo piensa como una intuición primitiva del pensamiento humano, o sea, como una aptitud apriorística que tiene nuestra especie, puede suponerse que de esta manera el desarrollo de los números reales constituye para nuestro pensamiento una forma constructiva *sui generis* de aproximarse al continuo intuitivo de tales números. Pero ésta no es una idea muy clara y está sujeta, desde el punto de vista epistemológico, a muchas dificultades; por otra parte, no se relaciona directamente con lo que nos proponíamos en este capítulo a propósito de las antinomias lógicas.

¿Cuál es en síntesis la lógica que aceptan los neointuicionistas? Ellos se oponen a la construcción de un sistema acabado y completo de reglas lógicas, pues aducen que las potencialidades creadoras de la mente están siempre presentes y pueden en cualquier momento descubrirse nuevas estrategias para el abordaje de la matemática. No obstante, el ya mencionado Heyting logró realizar una formalización parcial, que es la que se emplea cada vez que se quiere caracterizar la llamada "lógica neointuicionista". Señalemos finalmente que existe un célebre teorema, demostrado independientemente por el lógico ruso Valère Glivenko y por Gödel, el cual prueba que si la lógica proposicional clásica lleva a contradicciones, lo mismo sucederá con la lógica proposicional neointuicionista, y a la inversa. En el libro *Introducción a la metamatemática*, de Stephen Cole Kleene (1952), se establece que este resultado puede extenderse tanto a la lógica elemental de predicados como a la aritmética elemental (esta última sería, por ejemplo, el sistema de Peano con lógica subyacente elemental de predicados). Ello es muy interesante porque indicaría que los sistemas clásicos y los neointuicionistas serían equivalentes desde el punto de vista de la consistencia, resultado que mostraría la poca utilidad de la actitud prudente que motivó la aparición de la lógica neointuicionista. Sin embargo, para los seguidores fieles a las ideas de Brouwer todo ello no es muy convincente. La primera razón ya ha sido mencionada: según la posición neointuicionista la creatividad del pensamiento matemático es tal que siempre será posible hallar nuevos procedimientos y estrategias. Por ello no admite formalizaciones. Una segunda razón radica en que la argumentación que ofrece Kleene se basa en tácticas *standard* que no son precisamente del agrado epistemológico de los neointuicionistas.

En realidad, diríamos que el atractivo del neointuicionismo hoy en día radica más en su teoría empirista y psicologista acerca de los números que en su solución al problema de la no contradicción o consistencia de la aritmética. Desde luego, el lector podría preguntarse "¿no habría algún método constructivo para demostrar la no contradicción de la lógica intuicionista?". Pero, como lo prueba un célebre resultado de Gödel que analizaremos en el Capítulo 17, la respuesta es negativa[4].

Las propuestas logicistas y neointuicionistas no agotan el campo de las estrategias que se han propuesto para resolver el problema de las antinomias. Una tercera alternativa, que analizaremos en el próximo capítulo, radica en la posibilidad de "debilitar" la lógica superior a la que pertenece la teoría de conjuntos. Se trataría de proponer para ésta sistemas axiomáticos cuyos axiomas expresen *menos* que la teoría cantoriana original, pero que pese a ello permitan reconstruir la matemática sin antinomias.

4 En necesario tener en cuenta una prueba del lógico alemán Gerhard Gentzen, discípulo de Hilbert, quien demostró, en términos neointuicionistas, la consistencia de la aritmética. Pero las ideas de Gentzen son más "fuertes" que las del sistema de Peano formulado en dichos términos y por ende más "sospechosas de inconsistencia" que la aritmética misma.

Los intentos de resolución de las antinomias 2: las teorías axiomáticas de conjuntos

Las teorías axiomáticas de conjuntos

Nos ocuparemos ahora de una tercera solución posible a las antinomias que ya no consiste en establecer limitaciones semánticas a la lógica ni a los principios lógicos, sino que está basada en una nueva perspectiva. Hemos tratado hasta ahora con la teoría de conjuntos, por caso en la teoría de los tipos de Russell, apelando a lo que puede denominarse *lógica superior*; ésta implica ir más allá de la *lógica elemental*, es decir, la lógica proposicional y la lógica elemental de predicados. La lógica superior es en realidad mucho más "fuerte" por su poder expresivo, porque en ella hay predicados de orden superior, propiedades de propiedades, propiedades de propiedades de propiedades, etc. También la teoría de conjuntos pertenece a la lógica superior, con todo lo cual se construye una teoría que permite demostrar propiedades matemáticas inaccesibles para la lógica elemental. Si en la fundamentación de la matemática se separa en forma radical la lógica elemental de la superior se podría pensar que las antinomias son en realidad responsabilidad de lo que se admite en la lógica superior.

Efectivamente, hay un teorema de Gödel de 1930 que demuestra que, si sólo se trata con la lógica elemental, no se puede llegar a antinomias. Entonces parece que el problema consiste en conservar la lógica elemental y construir con ella, para la lógica superior, una teoría axiomática que se refiera a las entidades acerca de las cuales estamos hablando. En el caso de la teoría de conjuntos, habría que abandonar la teoría cantoriana original (porque conduce a contradicciones) y proponer un *sistema axiomático* que se refiera a las propiedades de esas entidades llamadas "conjuntos". Lo que se acepte en calidad de axiomas de este sistema no tiene por qué ser tan "fuerte" como aquello que admitía Cantor, pero tiene que serlo lo bastante como para que se pueda, sin antinomias, reconstruir la matemática.

El primer esfuerzo en esta dirección lo hizo en 1908 el matemático y lógico alemán Ernst Zermelo (1871-1953) en una memoria en la cual, sin términos lógicos sino del lenguaje ordinario, caracterizaba en siete axiomas qué debemos admitir para contar con una teoría de conjuntos suficientemente "fuerte" en el sentido antes indicado. Zermelo, nacido en Berlín, fue profesor en las universidades

de Zurich y Friburgo, ciudad en la que falleció. Su axiomatización, en cierto modo, protegió a la teoría de Cantor, que todavía despertaba resistencia entre algunos matemáticos. Es interesante describir brevemente estos axiomas, particularmente el segundo, para lo cual debemos realizar algunas consideraciones previas.

Para que aparezcan las antinomias lógicas, además del principio de tercero excluido (o alguno semejante a él), es necesario admitir lo que se llama el *principio de existencia*, cuyo enunciado es el siguiente: "para toda propiedad o condición 'bien definida' de las que hablemos, existe el conjunto de las entidades que las cumplen"[1]. En particular, si indicamos una expresión lógica como $f(x)$, donde x es una variable que admite determinadas entidades como valores y f una propiedad o condición expresable con la lógica elemental de predicados, tiene que existir un conjunto C tal que decir que x es un C es lo mismo que decir que x cumple f. Así, si $f(x)$ fuese "x es un conejo" debe existir el conjunto de los conejos. En realidad dicho principio se vincula con otro que casi nunca se reconoció explícitamente como tal en la lógica tradicional, y que afirma que, para todo concepto definido por propiedades que deben tener los individuos que las satisfacen, debe existir una *extensión*, o sea un conjunto de individuos que tengan dichas propiedades. (Recuérdese lo que afirmábamos en el Capítulo 10.) En este caso, se está definiendo al conjunto *por comprensión*, es decir, caracterizándolo como el conjunto de individuos que poseen esta o aquella propiedad, como cuando se dice "el conjunto de todos los objetos que son blancos". Es perfectamente admisible la idea de que la dificultad que suponen las antinomias la tiene este principio, quizás demasiado "fuerte". En efecto, por ejemplo, para definir el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos tenemos que admitir que dicha propiedad define la clase –la extensión– de las entidades que tienen esa propiedad. Podría admitirse que no toda propiedad, no todo concepto, no toda condición, define un conjunto. Por tanto, frente a una condición o propiedad nos encontramos con el problema previo de si ella define realmente la extensión correspondiente o no la define. En efecto, consideremos la propiedad *cíclope*. Por el principio de existencia, debe existir el conjunto o clase de los cíclopes, lo cual, por lo que conocemos en materia de biología, es la clase nula o conjunto vacío, sencillamente porque no existen cíclopes. Pero en la teoría de Zermelo, que enseguida describiremos, la

1 La cuestión de qué significa exactamente la exigencia de precisión ligada a la expresión "bien definida", como la formulaba en un comienzo Zermelo, puede ser aclarada de manera adecuada siguiendo una idea del lógico noruego Thoralf Skolem. Se caracteriza del siguiente modo: "una propiedad o condición está bien definida si puede ser expresada mediante una cuasiproposición que utilice únicamente los signos de la lógica elemental y los que corresponden a la teoría de conjuntos". Un ejemplo de tales signos sería "$\in$" que expresa la noción de pertenencia de un elemento x a un conjunto C en la cuasiproposición "$x \in C$". De ahora en adelante, aceptaremos tácitamente esta caracterización.

condición "idéntico a sí mismo" no define un conjunto o extensión, ya que ello conduciría a la antinomia de Russell.

En particular, la antinomia de Russell sería en último término una demostración *por el absurdo* de que "contenerse a sí mismo como elemento" no define ninguna extensión. De esta manera, la pretendida antinomia dejaría de serlo y se transformaría en una prueba de que esa extensión en particular, ese conjunto, no existe. El problema radica sin embargo en que necesitamos en matemática admitir que ciertas expresiones que dependen de una variable x, del tipo $f(x)$, expresan una condición que tiene extensión, y por ello hay que "debilitar" el principio de existencia de modo tal que garantice que *algunas* extensiones existen, aunque *no todas*. Y esto es precisamente lo que en el trabajo de Zermelo se acepta: se reemplaza el principio de existencia por otro algo más débil, pero además se afirma explícitamente que *tres* extensiones muy importantes existen.

Ahora estamos en condiciones de enunciar los siete axiomas propuestos por Zermelo, que expondremos de manera informal. Se supone que disponemos ya como noción lógica la de *identidad*. Entonces, el primer axioma afirma: "para todo x, si x pertenece a X si y solo si x pertenece a Y, entonces X es idéntico a Y". O sea que, cuando dos conjuntos tienen los mismos elementos, son el mismo conjunto. Este principio indica que estamos tratando con extensiones porque, aunque las condiciones hayan sido diferentes, aunque los conceptos empleados en la definición hayan sido distintos, aunque la comprensión sea diferente, las extensiones serán las mismas si están satisfechas por los mismos elementos.

El segundo axioma es el principio de existencia, ahora debilitado. En lugar de afirmar que, dada una condición o propiedad, existe el conjunto de las entidades que las satisfacen, diremos solamente: "dado un conjunto C y dada una condición o propiedad, existe un *subconjunto* de C, constituido por elementos de C, que las satisfacen". Constructivamente, ello es más adecuado pero más "débil" porque, por ejemplo, si nos propusiéramos definir el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos ya no podríamos hacerlo tal como lo hicimos con el principio general de existencia. Tendríamos que afirmar: "dado un conjunto C existe el subconjunto de C formado por todos los conjuntos-elementos de C que no se contienen a sí mismos como elementos". Ello no nos lleva a ninguna contradicción y demostraría además que el conjunto así definido no se contiene a sí mismo como elemento. Este segundo axioma garantiza la existencia de una clase sin elementos (clase nula o conjunto vacío, Ø). No hay más que una sola clase nula; si hubiese dos, distintas, por el axioma 1 resultaría que una de ellas debería tener un elemento que la otra no tiene; pero ello no puede ocurrir porque la clase nula no tiene elementos. Subsiste, sin embargo, el problema de saber si existe o no al menos un conjunto C. Hasta el momento no lo podemos asegurar, pero ello será afirmado por el axioma 6 de Zermelo.

De acuerdo con el punto de vista de Zermelo, y a fin de permitir la construcción de la matemática, los axiomas siguientes, 3, 4 y 5, se refieren a ciertas condiciones acerca de las cuales se admite que *tienen extensiones*. El tercer axioma afirma: "dados un elemento x y otro elemento y, existe el conjunto formado por ambos". Se trata del par *no ordenado* de los elementos x e y (el orden en que aparecen no se toma en cuenta). Con este axioma se pueden construir una cantidad muy grande de conjuntos; por ejemplo, el par no ordenado $\{x, y\}$ o el par no ordenado $\{x, x\}$ formado por x consigo mismo, que en realidad tiene un único elemento x. Lo hemos denominado, en el Capítulo 10, conjunto *unitario* o *singular*, y denotado sencillamente $\{x\}$. También podrían obtenerse conjuntos más complejos tales como $\{\{x,y\}, \{z,w\}\}$ y otros similares.

En realidad, desde el punto de vista de un neointuicionista, a partir de aquí podríamos obtener ya todos los números naturales, porque sería posible asimilar por ejemplo *cero* al conjunto vacío, 1 al conjunto unitario de cero, 2 al conjunto unitario de 1, 3 al conjunto unitario de 2, y en general, $n+1$ al conjunto unitario de n. La existencia del conjunto vacío, o sea del número *cero*, está garantizada por el segundo axioma, siempre que exista ya un determinado conjunto C, lo cual quedará establecido por el sexto axioma. Puesto que si C existe y damos una condición contradictoria, por ejemplo $x \neq x$, deberá existir el subconjunto de C formado por los elementos de C que cumplen la condición. Pero por el principio de no contradicción tales elementos no existen. El conjunto así obtenido será vacío. Esto garantiza la existencia del número *cero* y la de los demás números naturales. El axioma de existencia es un axioma muy "fuerte" pero constructivo, pues ofrece mucho más de lo que en principio se podría pensar. Pero los representantes de cierta corriente matemática llamada *formalismo* (que analizaremos en breve) no lo admitirían, pues ellos desean disponer no sólo de los números naturales sin también del *conjunto* formado por *todos* los naturales. Sin embargo, aun con los axiomas que hemos presentado hasta este momento, todavía no podemos admitirlo.

Antes de introducir el cuarto axioma de Zermelo, recordemos que se dice en general que un conjunto está incluido en otro cuando todos sus elementos son también elementos del primero. (Capítulo 10.) El axioma, muy importante por su "fuerza cantoriana" para producir números cardinales distintos, afirma lo siguiente: "dado un conjunto A existe el *conjunto potencia* de A, denominado P(A), formado por todas las *partes* (subconjuntos) de A". No debemos olvidar que también A es un subconjunto de A, es decir $A \subseteq A$. De manera que, por ejemplo, si A es el conjunto formado por 1, 2, y 3, el conjunto potencia es el conjunto formado por el conjunto vacío (Ø), la clase unitaria de 1, la clase unitaria de 2, la clase unitaria de 3, los pares {1,2},{1,3},{2,3}, y el conjunto A:

Si A = {1,2,3} entonces P(A) = {Ø, {1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3}}

El conjunto potencia resulta ser, por tanto, un conjunto de conjuntos. Según lo apuntado en el Capítulo 10, el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto, en particular de A, y de allí que pertenezca al conjunto potencia P(A). Se advierte que, dado un conjunto de tres elementos, el conjunto potencia tiene ocho elementos ($2^3 = 8$) y, en general, para un conjunto de n elementos, el conjunto potencia tendrá 2^n elementos. No hay que sorprenderse de que el uso reiterado del cuarto axioma de Zermelo produzca más y más cardinales. Advirtamos que, tomando el conjunto de los números naturales que aparece como conjunto en el sistema de Zermelo, tendríamos también el conjunto de todos sus subconjuntos; pero sorprendentemente puede demostrarse que tal conjunto tiene un cardinal distinto al del conjunto de los números naturales, aunque paradójicamente los dos conjuntos son infinitos.

Para formular el siguiente axioma, el quinto, diremos que un conjunto de conjuntos es una *familia* de conjuntos. Este axioma afirma: "dada una familia de conjuntos, existe la *unión* de todos ellos". Recordemos que esta última es el conjunto cuyos elementos son todos los que pertenecen a algún conjunto de la familia. Ello permite que, si tenemos una familia ya definida de conjuntos, podamos concentrarlos a todos en un gran conjunto que contenga a todos los elementos de cualquiera de los miembros de la familia. Lo cual permite también que se formen conjuntos cada vez mayores, es decir, que tengan más y más elementos.

El sexto axioma, llamado *axioma del infinito*, nos dice que *hay* un conjunto que contiene al conjunto vacío y que para cada uno de sus elementos contiene también al conjunto unitario de ese elemento. El lector advertirá que, si se acepta este principio, se aceptará en general la existencia de un conjunto infinito que contiene a todos los números naturales, porque si en él está *cero*, deberán estar también 1, 2, 3, 4, 5 y así sucesivamente; o sea, contendría el conjunto unitario de 0, el conjunto unitario del conjunto unitario de 0, etc. Se trata de un conjunto que contiene a *todos* los números naturales y que es un conjunto *actual* en el sentido de que, independientemente de un desarrollo constructivo, ya está totalmente dado. En realidad, el axioma del infinito puede enunciarse intuitivamente diciendo que existe un conjunto que contiene a todos los números naturales. Nótese que, según señalamos, esto satisface un requerimiento de los formalistas que supera las concepciones neointuicionistas, quienes sólo admiten los números naturales como entidades construidas progresivamente, pero no la existencia de un conjunto que contenga a la vez a todos ellos.

El último axioma de Zermelo, el séptimo, es muy célebre: es el llamado *axioma de elección*, que no enunciaremos rigurosamente. Dicho de manera informal, afirma que en toda familia de conjuntos es posible elegir, para cada conjunto de ella, un elemento representante del mismo; todos los elementos así escogidos formarían un conjunto que podríamos llamar "conjunto de selección de la familia". Éste es un axioma muy importante, acerca del cual hoy se sabe, después de muchas controversias, que no introduce inconsistencia por sí solo y

que es independiente de los demás axiomas de Zermelo. Los matemáticos sabían que, aunque no había ninguna razón para aceptarlo, era imprescindible para obtener teoremas de interés para la matemática.

La axiomática de Zermelo para la teoría de conjuntos fue después de 1908 ampliada o reconstruida de distintas maneras; por ejemplo, el sistema conocido como de Zermelo-Fraenkel le agrega un postulado más al de Zermelo; otras alternativas fueron expuestas por Willard Quine y Von Neumann-Bernays, como así también por Kurt Gödel. Todas ellas son muy interesantes pero no es necesario exponerlas aquí, porque ninguna altera la idea central, desde el punto de vista de la fundamentación de la matemática, de que no se ha "debilitado" la parte no elemental de la matemática sino la que corresponde a la lógica superior. De ser así, nos hallamos en una situación análoga a la que ya se nos ha presentado muchas veces a lo largo de este libro: ¿son consistentes estas teorías axiomáticas de conjuntos? Aclaremos, desde ya, que hasta ahora tal cosa no se ha podido demostrar. Sigue siendo un problema no resuelto el de establecer si el sistema de Zermelo (o los que son modificaciones del mismo) llevan o no a contradicciones.

Sobre la posición formalista

Hasta el momento, la palabra "formalismo" ha aparecido en este libro en distintas oportunidades y no siempre con el mismo significado. Cuando discutimos la naturaleza del método axiomático, *formalismo* y también *formal* aludían al carácter no semántico de los sistemas axiomáticos, es decir, a la ausencia de significación o denotación del vocabulario utilizado en la construcción de tales sistemas: un sistema axiomático no es más que un caso particular de sistema sintáctico que implica un conjunto de símbolos manipulados de acuerdo con ciertas reglas. También hemos utilizado la palabra "formalismo" en expresiones tales como "el *formalismo* de los números naturales" para referirnos abreviadamente a algún sistema axiomático formal, como el de Peano, capaz de introducir rigurosamente la noción de "número natural".

Pero también se llama *formalismo* a una posición o corriente filosófica alternativa al realismo matemático de Cantor, al logicismo de Russell y al neointuicionismo de Brouwer, característicamente expresada por el pensamiento del tantas veces citado David Hilbert. Para el formalismo, la matemática pura es una "ciencia vacía", sin contenido significativo u ontológico alguno, que debe desarrollarse sólo a partir de la coherencia de su propio discurso. Se vincula con el empleo en matemática de los sistemas axiomáticos formales, desprovistos de contenido semántico pero que respetan las reglas gramático-lógicas de construcción de las cuasiproposiciones y de los métodos formales de deducción. A este punto de vista genérico se lo llama *formalismo en sentido amplio*. Señalábamos en el Capítulo 4 que, en la Conferencia Internacional de Matemática, realizada

en París en el año 1900, Hilbert planteó 23 problemas irresueltos a los matemáticos del siglo XX. En uno de ellos solicitaba encontrar una base axiomática formal que permitiese deducir todas las teorías físicas y los fenómenos aleatorios o dependientes del azar. Es comprensible, entonces, que en el enunciado de sus 23 problemas, el gran matemático alemán haya querido presentar una suerte de panegírico del método axiomático.

Hilbert pretendía que los sistemas axiomáticos de las teorías de conjuntos tuviesen la riqueza suficiente como para reconstruir la matemática –tanto la clásica como la moderna– pero imponía ciertas condiciones. Exigía, por ejemplo, que la manipulación del vocabulario y de los signos fuese no sólo meramente sintáctica sino también que se llevase a cabo respetando ciertas ideas neointuicionistas. Para la fundamentación de la aritmética de los números naturales, Hilbert no se muestra neointuicionista, puesto que a su juicio ello se puede lograr utilizando procedimientos admitidos en el seno de los sistemas axiomáticos de las teorías de conjuntos. Pero sí admite (por caso, para cuestiones vinculadas con pruebas de consistencia) que es una buena precaución no extralimitarse más allá de las prescripciones neontuicionistas[2]. En cierto modo, el constructivismo matemático de los neointuicionistas ha influido no sólo en el plano de la lógica sino también en el de la metodología axiomática. No es irrelevante plantearlo de este modo, puesto que ello evidencia un rechazo del realismo platónico y una concepción más "psicologista" y "naturalista" de la fundamentación de la matemática.

La posición anterior de Hilbert, que acepta la tesis según la cual el estudio de los sistemas axiomáticos formales debería efectuarse según las concepciones y metodologías constructivas y finitistas preconizadas por el neointuicionismo, se llama *formalismo en sentido estricto*. En gran medida, la obra de Hilbert está desarrollada asumiendo este punto de vista, lo cual lo distancia de lógicos como Alfred Tarski, formalista en sentido amplio, que no titubearía en estudiar los sistemas axiomáticos empleando estrategias de la matemática no finitista. Ello coloca a Hilbert en una posición intermedia entre la de los neointuicionistas y la de los logicistas. Efectivamente, supone que la matemática sería en último término reducible, si bien no a la lógica, a los sistemas axiomáticos de las teorías de conjuntos.

Observemos incidentalmente que Kurt Gödel, acerca de cuya importantísima obra nos ocuparemos en el próximo capítulo, fue durante mucho tiempo formalista en sentido estricto y muchas de sus contribuciones se lograron desde esta perspectiva. Pero en las últimas etapas de su vida, Gödel se acercó al platonismo, si bien con esta diferencia: las entidades formales abstractas ya no

2 Técnicamente, ello se expresa diciendo que Hilbert propone utilizar los métodos neointuicionistas no para el lenguaje de la aritmética sino para el discurso *metalinguístico* acerca del lenguaje aritmético. La noción de *metalenguaje* se aclara al final de este capítulo.

serían las que consideraba Platón (ideas o formas aritméticas, geométricas, etc.) sino precisamente los *conjuntos*, que habitarían el segundo mundo platónico. Ello muestra que para Gödel los sistemas axiomáticos de conjuntos serían insuficientes para un fundamentador de la matemática, pues éste tendría que tener en cuenta además, desde el punto de vista ontológico, la existencia de tales conjuntos platónicos. Si no nos equivocamos al hacer esta interpretación del pensamiento de Gödel, llegaríamos a la conclusión de que la matemática tendría como punto de partida (como lo pensaba Platón) cierto tipo de intuición que ya no sería la de los neointuicionistas sino que consistiría en la captación directa de entidades abstractas, lo cual se suele denominar *intelección*. Por supuesto, este punto de vista *realista matemático* de Gödel, como el de Platón, presupone dificultades de orden metafísico, razón por la cual no son muchos los filósofos de la matemática que hoy adhieren a tal posición. La concepción hilbertiana parece ser más atractiva por ser filosóficamente más prudente y vincularse en mayor grado con algunas de las orientaciones epistemológicas actuales denominadas "naturalistas", que conciben a la ciencia y al conocimiento no como una excursión de carácter metafisico sino como una construcción biológica y psicológica privativa del ser humano.

Las expectativas de Hilbert eran las siguientes: (a) que con la metodología axiomática se podría obtener una reconstrucción *completa* de la matemática; (b) que con ella podrían llegar a edificarse cuerpos *consistentes* de pensamiento matemático, en el sentido de que alguno de los sistemas axiomáticos propuestos para la teoría de conjuntos, ahora más prudentes, no conducirían a contradicciones. Pero ello no fue más que un articulo de fe y en este punto podemos afirmar que el problema planteado por las antinomias en modo alguno puede ser considerado resuelto. Como analizaremos en el próximo capítulo, una de las hazañas intelectuales más sorprendentes de Gödel consistió en mostrar que el programa de Hilbert era ilusorio y conformaba una esperanza frustrada.

Señalemos que en el logicismo de Russell y Frege, con su intento de reducción de la matemática a la lógica, se advierte un "temperamento filosófico" que no está presente en el formalismo de Hilbert. Por el contrario, éste concebía a la matemática como una actividad autónoma inherente a la actividad de los matemáticos, y su apología del método axiomático formal está destinada a dotar del más alto grado de abstracción a la matemática sin necesidad de recurrir, para su fundamentación, a otras disciplinas.

Cuatro posiciones filosóficas acerca de la matemática

En este punto, podemos resumir las *cuatro* posiciones filosóficas fundamentales que existen acerca de la naturaleza de la matemática y que han aparecido a lo largo de este libro. (Véase el cuadro.)

Posición filosófica	Representantes arquetípicos	Caracterización	Dificultades
Realismo matemático	Cantor, Gödel (segunda etapa)	Los "objetos matemáticos" existen en un mundo *sui generis* de carácter platónico	Admisión de la posición metafísica que ello implica. Dificultades en materia de antinomias
Logicismo	Frege Russell	Los conceptos matemáticos pueden ser reducidos a conceptos lógicos y los teoremas matemáticos se reducen a verdades lógicas	No está clara la existencia de una única disciplina lógica confiable. Problema de las antinomias
Neointuicionismo	Brouwer Heyting	Construcción finitista de los conceptos matemáticos. Los objetos matemáticos tienen mera índole conceptual. Las verdades y las falsedades sólo pueden ser construibles	Pérdida de la validez de principios lógicos tradicionales, en particular el de tercero excluido. La matemática así obtenida ha quedado muy debilitada frente a la tradicional. Es muy "débil" e insuficiente para la física
Formalismo	Hilbert Gödel (primera etapa)	En sentido *amplio*, empleo meramente sintáctico de sistemas axiomáticos. En sentido *estricto*, uso además de métodos análogos a los del neointuicionismo en los procesos empleados para la construcción de dichos sistemas	Limitaciones establecidas por los llamados "metateoremas de Gödel". (Véase el capítulo siguiente.)

Cuatro posiciones filosóficas acerca de la matemática. El realismo matemático da por sentado que el mundo de los objetos matemáticos formales es no contradictorio. Las otras tres posiciones involucran la expectativa de que, por eliminación de las antinomias, la matemática sea consistente. En ciertos casos particulares, como el de Hilbert, dicha expectativa se extiende a la completitud.

Metamatemática y metalenguajes

El lector habrá advertido que nuestras consideraciones, desde comienzos de este libro, tienen por objeto analizar la naturaleza de la matemática. Sin embargo,

a ello un discurso matemático: no estamos demostrando teo-
es de las entidades matemáticas, tal como lo hacen los tex-
en las clases de matemática. Ello ha llevado a crear una pa-
...matemática", para referirse a tal discurso epistemológico y filosófico *acerca de* la matemática. Esta noción es particularmente afín con la posición formalista y, de hecho, se atribuye a Hilbert haber acuñado por primera vez el vocablo. Pero es oportuno advertir que "metamatemática" se utiliza en dos sentidos similares pero no idénticos. Por una parte, designa un discurso (construido incluso con recursos lógicos y matemáticos actuales) empleado esta vez, no para referirnos a números o figuras, sino al discurso matemático como *objeto propio de estudio.*

Hay que distinguir, por ejemplo, entre proposiciones matemáticas tales como

- *la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180°*
(discurso matemático)

y proposiciones metamatemáticas, por ejemplo

- *el sistema SAFO no es sintácticamente completo*
(discurso metamatemático)

Esto justifica a su vez que, como lo hemos hecho hasta el momento, llamemos "teoremas" a las afirmaciones probadas *dentro* de los sistemas axiomáticos de la matemática, pero de aquí en más emplearemos el vocablo "metateorema" para las afirmaciones que se puedan establecer desde el campo de la metamatemática, tales como "la aritmética es consistente". Encontraremos también, con frecuencia, la distinción entre *teorías* (en alusión a los sistemas axiomáticos de la matemática) y *metateorías* (que se refieren a los análisis, a veces formales y a veces intuitivos, llevados a cabo a propósito de dichas teorías). En el capítulo próximo comprobaremos que algunos de los resultados más significativos de la metamatemática del siglo XX quedan ejemplificados por los llamados "metateoremas de Gödel" de 1931.

Estas distinciones están estrechamente relacionadas con las que aparecen en el campo de la lingüística contemporánea. De manera análoga a lo que hemos señalado, los lingüistas discriminan entre "lenguaje objeto" (el lenguaje que se estudia) y "metalenguaje" (el lenguaje del que nos valemos para estudiar el lenguaje objeto). Por ejemplo, una gramática del lenguaje inglés escrita en castellano para el público hispanoparlante conformaría un metalenguaje (el castellano) para ocuparnos del idioma inglés (lenguaje objeto). Los lingüistas y también algunos filósofos no dejan de advertir que el lenguaje ordinario (para nosotros, el castellano) estaría estratificado: una parte del mismo es el lenguaje objeto básico, con el cual nos referimos a las cosas y a las propiedades de las cosas; por ejemplo, "esta flor es azul" pertenecería al lenguaje objeto básico del castellano.

En cambio, si decimos "la palabra 'azul' es bisílaba" nos hallamos en un estrato del castellano de carácter metalingüístico, apto para mencionar las palabras del lenguaje objeto básico. Pero ello no termina aquí, pues si afirmamos que la palabra "polisílaba" es polisílaba nos encontramos en un estrato superior al anterior, y nuestra afirmación pertenece a lo que se llama un "metametalenguaje", y así sucesivamente. Esto ha dado lugar a la concepción de una jerarquía infinita de los lenguajes, propuesta por primera vez por Bertrand Russell en el prefacio del libro *Tractatus logico-philosophicus* (1921) del influyente y ya mencionado filósofo Ludwig Wittgenstein.

Pero en relación con los problemas de índole matemática, lo que importa señalar desde este punto de vista es que un sistema axiomático es un lenguaje objeto, en tanto que el discurso metamatemático que lo menciona y analiza es un metalenguaje. Podemos ilustrar esta afirmación con el recurso empleado en el Capítulo 6 de comparar a un sistema axiomático con el juego del ajedrez. Las afirmaciones que describen las posiciones iniciales de las piezas equivalen, en un sistema axiomático, a los axiomas: pertenecen al lenguaje objeto, al que podríamos llamar "ajedrecístico". En cambio, cuando decimos que existen veinte jugadas posibles para las piezas blancas al inicio del juego estamos hablando en un metalenguaje, que bien podría ser denominado "metaajedrecístico". Otra afirmación metaajedrecística podría ser, por ejemplo, que si la negras sólo conservan su rey y las blancas su rey y un alfil es imposible que las blancas ganen el juego, ya que no podrán dar jaque mate.

La razón por la cual es conveniente destacar este punto es que al considerar un sistema axiomático hay que distinguir entre la lógica subyacente (que pertenece al lenguaje del sistema, en particular al lenguaje matemático) y la lógica del metalenguaje, es decir, del discurso metamatemático. Como ya señalamos, el sistema axiomático de Peano para la aritmética no tiene la misma "fuerza" para demostrar teoremas si se emplea como lógica subyacente una lógica elemental de predicados que si se utiliza una lógica superior. Pero, por otra parte, lo que podemos llegar a saber acerca de una formulación axiomática de la aritmética como la propone Peano depende de que la lógica del metalenguaje sea elemental o superior. Por esta circunstancia, quien lleva a cabo el estudio de un sistema axiomático debe aclarar con precisión cuál es la lógica subyacente y cuál es la lógica metamatemática. Sería en principio distinto estudiar con lógica superior el sistema de Peano formulado con lógica elemental que, a la inversa, analizar con lógica elemental el sistema de Peano formulado con lógica superior. El discurso metamatemático no sería el mismo.

Lo expresado anteriormente se aplica al primer sentido de la palabra "metamatemática". Pero señalábamos al comienzo que existe otra manera de entender dicho vocablo, empleado por los formalistas en sentido estricto. La metamatemática también se refiere aquí al discurso empleado para referirnos al discurso matemático, con la salvedad de que solamente se han de utilizar los recursos constructivos inspirados en el neointuicionismo.

Al tratar las expectativas de Hilbert acerca de los problemas que deberían resolver los matemáticos del siglo XX, señalábamos que, a su juicio, el método axiomático permitiría obtener una reconstrucción *completa* de la matemática, y que, por otra parte, sería finalmente posible probar la *consistencia* de la misma, pues los nuevos sistemas axiomáticos propuestos para la teoría de conjuntos ya no conducirían a antinomias. Afirmábamos también que quizás todo ello configuraría una mera esperanza o un artículo de fe. Y así ocurrió. En 1931, el joven matemático y lógico Kurt Gödel probó que este programa formalista de Hilbert era irrealizable. Analizaremos las sorprendentes e inquietantes conclusiones de Gödel en el próximo capítulo.

Los metateoremas de Gödel y las limitaciones de la matemática

Los metateoremas de Gödel (1931)

Kurt Friedrich Gödel (1906-1978), lógico y matemático estadounidense de origen austriaco, nació en Brünn, Moravia (hoy Brno, República Checa). Ingresó como estudiante en la Universidad de Viena en 1924, y sus intereses iniciales radicaron en la física teórica, si bien luego se inclinó por la matemática. Dio clases en dicha institución desde 1933 a 1938. Estuvo en estrecha relación con los empiristas lógicos del Círculo de Viena, donde recibió la influencia, particularmente, de Rudolf Carnap. Ante la amenaza de ser reclutado para las fuerzas armadas nazis, Gödel emigró a los Estados Unidos en 1940, y allí fue miembro del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, Nueva Jersey, desde 1953 hasta su muerte. Trabó amistad con Albert Einstein y juntos colaboraron en aspectos filosóficos y matemáticos de la teoría general de la relatividad. También enseñó matemática en la Universidad de Princeton. Parte de su importante obra en lógica y matemática ha producido un notable impacto incluso en ámbitos ajenos a la filosofía y fundamentación de la matemática. Cuando se lo nombró doctor honorario en Ciencias por la Universidad de Harvard en 1952 se lo llamó "el descubridor de la verdad matemática más significativa del siglo". Durante toda su vida sufrió problemas de salud física y mental. En estado de paranoia, al final de su vida llegó a estar convencido de que estaba siendo envenenado, y por ello dejó de alimentarse y acabó muriendo en Princeton por desnutrición.

En 1931, en un escrito denominado "Sobre proposiciones formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas relacionados", el joven Gödel publicó dos sorprendentes resultados de capital importancia para la historia de la lógica y de la matemática contemporáneas, ya anticipados el año anterior en una comunicación a la Academia de Viena. Los llamaremos *primer metateorema de Gödel* y *segundo metateorema de Gödel*, y los analizaremos por separado.

Consideremos un hipotético sistema axiomático que sea suficiente para fundamentar la aritmética. En primer lugar, es necesario tener en cuenta para comprender las demostraciones de Gödel que, si bien un sistema axiomático es *formal* y sus términos carecen de significado, de hecho tanto el sistema de Peano como el de Zermelo tienen lo que podríamos llamar una "interpretación intuitiva

standard". De manera que vamos a suponer que el sistema axiomático que hemos elegido para este análisis tiene como axiomas verdades aritméticas o verdades conjuntísticas y que por consiguiente los axiomas transmiten la verdad, a través de las demostraciones, a los teoremas[1]. Advirtamos entonces que si esta interpretación intuitiva es adecuada, concluimos que si el sistema contiene alguna afirmación falsa no puede ser teorema del sistema a menos que el sistema sea inconsistente, en cuyo caso *toda* afirmación sería demostrable, sea falsa o verdadera. Es por ello, como analizaremos de inmediato, que para demostrar los resultados de Gödel es necesario hacer la suposición preliminar de que el sistema que estamos estudiando es *consistente*. Insistimos en que afirmaciones como ésta, que enuncia la consistencia del sistema, no son en realidad teoremas internos del sistema en discusión sino metateoremas, en el sentido ya explicitado en el capítulo anterior, es decir, afirmaciones formuladas por medio del metalenguaje con el que lo estamos analizando. Un ejemplo de tales afirmaciones sería aseverar la consistencia del sistema axiomático dado, lo cual, en general, no es cosa probada sino una hipótesis adoptada porque se pueden, a partir de ella, obtener resultados metalingüísticos interesantes.

Admitamos que para la deducción se utiliza como lógica subyacente alguna lógica que contenga a la lógica elemental de predicados. Aquí aparece una de las ideas realmente importantes y atractivas de Gödel: la llamada "aritmetización de la sintaxis". Es posible construir lo que se llama un *código de Gödel*, el cual, sorprendentemente, hace lo siguiente: *a cada símbolo del sistema axiomático le asigna un determinado número natural.* Así, por ejemplo, símbolos tales como "$\sim$", "$\wedge$", "$\supset$", "p", "q", etcétera, estarán asociados a determinados números, llamados *gödelianos*. Una vez que hemos enumerado los símbolos se trata de construir otra enumeración: la de las expresiones (entre ellas las bien formadas, o sea las cuasiproposiciones), tales como "$p \supset q$" o bien "$p \vee (p \supset q)$". Supongamos que para la aritmetización gödeliana se eligen como números naturales los impares, por ejemplo, y que a un símbolo a se le asigna 3, al símbolo b se le asigna 5, al símbolo c se le asigna 7, y así en general para los paréntesis, las variables, etcétera, y que tengamos una expresión como *abab*. Ésta se representaría de la siguiente manera: como hay cuatro símbolos, se toman los cuatro primeros números primos 2, 3, 5 y 7 (exceptuando el 1). Si en la expresión que queremos codificar, habiéndole hecho corresponder a a el número 3 y a b el número 5, lo que asignaríamos a la expresión sería: $2^3 \times 3^5 \times 5^3 \times 7^5$, número gödeliano de la misma. (Esta súbita aparición de los números primos quedará clara de inmediato.) En el orden dado, los cuatro exponentes son los que representan, según el código de Gödel, a a y a b (3, 5, 3, 5). Ahora bien, se sabe en aritmé-

1 Por tal razón, el lector no debe sorprenderse de que, por abuso de lenguaje, mencionemos *proposiciones* al hablar de *sistemas axiomáticos*; en rigor, nos estamos refiriendo a las proposiciones que resultan de *interpretar* tales sistemas.

tica que, dado un número natural, por caso 75000, éste admite una descomposición en potencias de números primos de la siguiente forma:

$$75000 = 2^3 \times 3^1 \times 5^5$$

y que el resultado de esta descomposición, como demostró Gauss en el siglo XIX para todo número natural, es *único*. De modo tal que si conocemos un número gödeliano, en nuestro ejemplo anterior 75000, lo podríamos descomponer en factores primos colocando las bases (2, 3, 5) de menor a mayor y los exponentes (3, 1, 5). Analizando los exponentes y empleando el código podríamos saber qué expresión representa el número.

No puede haber confusión entre los números gödelianos para expresiones y los números para símbolos, porque a los números para símbolos los hemos elegido *impares* y en cambio los números para expresiones comienzan por el factor 2 elevado a alguna potencia, por lo cual se trata de un número *par*. Advirtamos también que el número 2 tiene que estar elevado a una potencia impar, porque los impares son los que representan determinados símbolos.

Ahora debemos asignar números gödelianos no sólo a las expresiones sino también a las *sucesiones de expresiones*, cuestión importante porque una demostración es precisamente una sucesión de tal naturaleza. De manera que si nos queremos referir a una simple demostración constituida por dos premisas, y los números gödelianos que les corresponden a cada una son por caso 18 y 216, le asignamos a la sucesión el número gödeliano $2^{18} \times 3^{216}$, donde otra vez se ubican los números primos de menor a mayor y los exponentes son los números asignados a las expresiones que integran la sucesión.

Dado un número gödeliano así, ¿cuál es la sucesión que representa? Lo que debemos hacer es hallar su desarrollo en factores primos y considerar los exponentes; si éstos son pares y corresponden en el código a expresiones, sabremos cuál es la sucesión de expresiones que estamos teniendo en cuenta. No puede haber confusiones porque los números que representan a las sucesiones de expresiones comienzan por 2 elevado a un exponente *par* (número que representa a una expresión); en cambio, en el desarrollo de un número que representa a una expresión, 2 está elevado a un exponente *impar*. Por consiguiente, es imposible que se confundan las representaciones de símbolos con las de las expresiones y con las de las sucesiones de expresiones. Nótese que de todos modos habría números que *no* son gödelianos y que por lo tanto no interesarán en esta aritmetización del lenguaje del sistema axiomático.

Por todo lo expresado anteriormente, un sistema axiomático determinado puede ser representado numéricamente por medio de un código de Gödel. Lo que Gödel advierte es que, si tenemos un sistema axiomático como el de Peano o el de Zermelo, podemos en realidad pensar que el sistema es expresable por medio de un lenguaje numérico. Dicho de otro modo, las propiedades sintácticas del sistema vinculadas con axiomas, demostraciones y teoremas se pueden codificar como relaciones aritméticas entre los números del código. Si esto es así, el

sistema axiomático en cuestión, ahora codificado, *está hablando de sí mismo*. Aparentemente, el sistema menciona números, pero, a través del código, está hablando de entidades lingüísticas (signos, expresiones, sucesiones de expresiones) del propio lenguaje. Ésta no es la interpretación principal o *standard* del sistema pero es una interpretación posible y legítima. Naturalmente, en el código de Gödel debe haber predicados numéricos que reflejen la propiedad de *ser axioma*, de *ser teorema*, de *ser demostración*. De modo que si tenemos un sistema axiomático apto para la aritmética, y queremos llevar a cabo un análisis sintáctico del mismo, se lo puede realizar de una manera muy curiosa: aritméticamente. Ello no es sencillo, lo cual explica la extensión y aridez del trabajo de Gödel. En este punto, Gödel es capaz de encontrar una expresión, llamémosla *a*, caracterizada por cierto número gödeliano, que afirma (de sí misma) que ella no es demostrable en el sistema axiomático al que pertenece: "*a* no es demostrable".

La existencia de una expresión *a* que se menciona a sí misma nos obliga a considerar nuevamente las antinomias lingüísticas o semánticas, de las cuales hemos dado un ejemplo en el Capítulo 14: la antinomia de Nelson y Grelling. Estas antinomias se vinculan con la capacidad que tiene el lenguaje de hablar de sí mismo, es decir, de autorreferenciarse. Presentaremos aquí una antinomia semántica clásica, ya mencionada, atribuida al filósofo Eubúlides de Mileto, del siglo IV a. C., miembro de la llamada "Escuela de Megara", quien fue contemporáneo y adversario intelectual de Aristóteles[2].

La antinomia de Eubúlides se presenta cuando alguien (llamémoslo Juancito) dice "en este momento yo estoy mintiendo", es decir que, cuando pronuncia la oración, Juancito pretende estar mintiendo. Ahora bien, ¿es verdadero o falso lo que afirma Juancito? De ser verdadero, Juancito miente, y por tanto ese enunciado es falso. De ser falso, Juancito no miente, y por tanto ese enunciado es verdadero. El enunciado es verdadero si y solo si es falso; y es falso si y solo si es verdadero. Estamos en una situación semejante a las que emergían de antinomias como la de Nelson y Grelling, las cuales, como se recordará, se presentaban en el campo lingüístico. No es sencillo remediar este género de situaciones. Ha llevado, entre otros estudios, a los del ya mencionado Alfred Tarski (1902-1983), quien, en trabajos tales como "El concepto de verdad en los lenguajes formalizados" (1933) y "La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica" (1943-1944), mostró que los lenguajes que admiten la autorreferencia (es decir, que hablan de sí mismos) no permiten una definición *interna* de "verdad" porque ello podría replicar la antinomia de Eubúlides.

2 Existen distintas variantes del argumento de Eubúlides, conocidas genéricamente como "paradoja (o antinomia) del mentiroso", pero no todas son equivalentes. Una de ellas se atribuye a Epiménides, filósofo cretense del siglo VI a. C. Sin embargo, algunas son meras paradojas, como la de Epiménides, a diferencia del argumento de Eubúlides, tal como aquí lo presentamos, que es una verdadera *antinomia*.

Si tenemos en cuenta esta dificultad, y el hecho de que Gödel, a través de su código, ha conseguido encontrar una expresión que afirma de sí misma "no soy demostrable", parecería que estamos corriendo el riesgo de que reaparezca la antinomia de Eubúlides. Pero aquí es donde Gödel muestra que la situación es diferente y que tal riesgo no existe.

Consideremos la expresión *a* mencionada anteriormente, la cual afirma de sí misma "*a* no es demostrable". Una primera posibilidad es que el sistema axiomático sea tal que *a* es demostrable. Si esto ocurre, *a* sería verdadera. Ello implica que aquello que afirma *a* se cumple. ¿Qué afirma *a*? Que ella no es demostrable, o sea, que *no es teorema*, lo cual prueba que nuestra suposición de que *a* es teorema lleva a contradicción. Por tanto, tal suposición es falsa. Pero esto es precisamente lo que *a* afirma de sí misma, lo cual establece que *a*, de manera rotunda, es verdadera. Resumiendo, hemos arribado a dos resultados: (1) que *a* no es teorema; y (2) que *a* es verdadera, es decir que $\sim a$ es falsa, de donde se deduce a su vez que $\sim a$ no puede ser teorema. (Porque una vez más hay que recordar que los teoremas deben ser verdaderos.) En una palabra, llegamos a la conclusión de que *a* no es demostrable y su negación tampoco. Lo que Gödel advierte es que no hay aquí ningún tipo de contradicción, sino que, debido a la existencia de *a*, se tiene un extraño ejemplo de una proposición que no es demostrable ni tampoco lo es su negación. Adviértase que hemos obtenido también la información de que *a* es verdadera, lo cual muestra la existencia de una proposición verdadera que no es demostrable.

Como consecuencia, cualquier sistema axiomático que contenga a la aritmética (Peano, Zermelo, etc.) será *incompleto* en dos sentidos: (a) desde el punto de vista *sintáctico*, porque no se cumpliría que, para toda cuasiproposición *p* del sistema, ella tiene que ser teorema o bien tiene que serlo su negación; (b) desde el punto de vista *semántico*, porque hemos probado que *a* debe ser verdadera, y ello demuestra que en la interpretación gödeliana del sistema (la que permitió aritmetizarlo y hacer que éste hable de su propia sintaxis) hay una proposición verdadera que no puede ser demostrada. Tanto (a) como (b) constituyen lo establecido por el primer metateorema de Gödel:

Cualquier sistema axiomático que contenga a la aritmética (Peano, Zermelo, Principia Mathematica, *etc.) es incompleto.*

Es necesario señalar que cuando nos referimos a "cualquier sistema axiomático que contenga a la aritmética" debe entenderse como *cualquiera que contenga al menos las operaciones de "suma" y "producto"* (como ocurre con los que hemos mencionado). Como lo demostró en 1929 el lógico polaco Mojzesz Presburger, a un sistema axiomático que contenga a la suma pero no a la multiplicación no se le pueden aplicar los argumentos de Gödel. En segundo lugar, debe aclararse que para la demostración del primer metateorema se requiere una condición que no siempre se explicita: se exige que el conjunto de los axiomas

sea *decidible* en el sentido de que exista un método que permita dirimir, en un número finito de pasos, para cualquier cuasiproposición del sistema, si ésta es o no axioma. A veces se emplea el término *decidible* como sinónimo de *completo*, pero nosotros no aceptaremos esta identificación. La completitud determina, para toda expresión del sistema axiomático, si ella es teorema o lo es su negación. Todo ello puede resultar extraño, ya que, intuitivamente, parece inevitable que, al definir un sistema axiomático, demos una lista completa de los axiomas o una manera de reconocerlos por su forma. Pero los lógicos han establecido que en ciertas construcciones lógicas es posible definir sistemas donde esta exigencia no se cumple. En tal caso existe un célebre teorema del lógico polaco Adolf Lindenbaum que afirma que *todo* sistema axiomático consistente puede extenderse de manera tal que se obtenga un sistema completo. Hay una tercera condición que debe cumplir el sistema axiomático, que trataremos luego al ocuparnos del segundo metateorema de Gödel.

Esta contribución de Gödel es realmente impactante y ha sido interpretada, en particular, de manera muy pesimista. El argumento que se invoca es que demostraría que la ciencia "no lo puede todo" y entonces la capacidad humana para alcanzar verdades científicas es limitada. Pero es necesario proceder con cautela a propósito de tal afirmación. En primer lugar, el reconocimiento de que la aritmética (y por ende la matemática) es siempre incompleta, es decir, que existen límites formales para el pensamiento matemático, no implica que la aventura que supone esta disciplina sea una especie de trivialidad. Aunque no todo el infinito de potenciales verdades formales esté a nuestra disposición, a lo que la matemática puede acceder es suficientemente amplio y rico tanto en el ámbito de lo puro como en el de lo aplicado. La investigación en matemática, pese a las limitaciones introducidas por el primer metateorema de Gödel, es profunda e inagotable.

La irresolubilidad del problema de la consistencia

El *segundo metateorema de Gödel* trata acerca del problema de cómo se puede saber si un sistema axiomático dado es consistente o no lo es. Aquí acontece la siguiente situación: o bien el sistema que estamos analizando tiene medios, sintácticos o semánticos, para establecer su consistencia *por sí mismo*, o bien no los tiene. Lo que nos preguntamos es si es posible, a través del código de Gödel, que un sistema axiomático S demuestre su propia consistencia, es decir, que exista una proposición *c* del mismo que la exprese ("S es consistente") y que se pueda obtener como teorema de S. El segundo metateorema de Gödel demuestra que ello es imposible. Adviértase que la afirmación "S es consistente" es una proposición metalingüística, porque se habla de S por medio de una proposición que pertenece al sistema (el sistema habla de sí mismo).

Señalábamos que, para demostrar el primer metateorema de Gödel, el sistema axiomático debe cumplir tres condiciones, de las cuales mencionamos dos de ellas: la exigencia de que contenga al menos las operaciones de "suma" y "producto", y la de que el conjunto de los axiomas sea decidible. Ahora agregamos la tercera: para acceder a los resultados de dicho metateorema, el sistema axiomático que estamos considerando debe ser *consistente*. Ello no supone que se haya establecido una prueba de tal consistencia, sino que si ésta se admite como hipótesis los resultados de Gödel pueden mostrarse como implicados lógicamente por esta conjetura. De hecho, las presuposiciones de Gödel son un poco más especiales, pero el lógico estadounidense J. Barkley Rosser mostró que el proceso de la demostración puede llevarse a cabo con la sola presuposición de la consistencia. Ello muestra por qué, entre otras razones, es importante el problema de elucidar si realmente el sistema en estudio es o no consistente.

Para obtener el segundo metateorema de Gödel es necesario comprender la siguiente idea. El primer metateorema fue demostrado desde un metalenguaje, al cual, si se quiere, podríamos aplicar también la metodología de asignarle un código de Gödel y por tanto aritmetizarlo. Pero si logramos tal cosa, dado que el sistema del cual partimos es apto para la aritmética, esto significaría que en él serían formulables expresiones metalinguísticas, lo cual mostraría que lo que obtuvimos en el primer metateorema podría reflejarse en una cierta expresión aritmética formulada en el primer sistema. Desarrollarlo no es tarea sencilla y demanda un gran esfuerzo. Gödel consigue mostrar que en el sistema S dado debe existir una proposición *c* que expresa la afirmación metalingüística "S es consistente". En la discusión metalinguística del primer metateorema hemos establecido que, si el sistema es consistente, entonces aquella ya señalada proposición *a* es indemostrable y por tanto *a* expresa su propia indemostrabilidad. Si todo ello es aritmetizado según el código de Gödel, tendríamos en nuestro sistema un condicional "si *c* entonces *a*" que es ahora un teorema del mismo.

Pero si tuviéramos además la fortuna de que *c*, la proposición que expresa la consistencia del sistema, fuese también un teorema de éste, podríamos construir el siguiente razonamiento, válido por tener la forma lógica *modus ponens*:

$$\begin{array}{l} c \supset a \\ c \\ \hline a \end{array}$$

En tal caso, tendríamos a *a* como teorema; pero, como hemos demostrado, ello es imposible. Como la primera premisa es teorema, entonces la segunda no puede serlo, porque obtendríamos que *a* es teorema, lo cual hemos rechazado. Y éste es, entonces, el segundo metateorema de Gödel:

Ningún sistema axiomático que contenga a la aritmética (Peano, Zermelo, Principia Mathematica, *etc.) puede demostrar su propia consistencia.*

La consecuencia es un tanto extraña: *no se dice* que no se pueda demostrar la consistencia de un sistema S, porque puede haber otros sistemas tan ricos en expresividad que permitan, a través del examen de todas sus demostraciones, mostrar que no se produce contradicción en S. Pero un sistema S' más rico que S será un sistema más "sospechoso": contendrá las reglas del sistema S más algunas otras, y por consiguiente se plantearía el problema de si el sistema auxiliar más rico S' es consistente o no lo es[3]. Y nuevamente, por el segundo metateorema de Gödel, se podría demostrar que S' no puede mostrar su propia consistencia. Por lo cual la situación es que la aritmética ordinaria formalizada a la manera de Peano, a la de Zermelo o a la de los *Principia Mathematica* no puede mostrar su consistencia y por consiguiente resulta que no podemos conocer de manera efectiva lo que queríamos saber desde un principio: si estos sistemas formales son consistentes o no. Entonces el problema planteado por la aritmetización de la matemática, la reducción al problema de la consistencia de la aritmética, la esperanza de encontrar un modelo que pruebe la consistencia de la aritmética, se ha vuelto muy problemática.

En síntesis, se ha demostrado que si el sistema de Peano, el de Zermelo o algún otro apto para fundamentar la aritmética, como el de los *Principia Mathematica*, es consistente, existe en él una expresión verdadera pero indemostrable. Si no fuese así, si el sistema no fuera consistente, todas las expresiones serían teoremas y por consiguiente no habría absolutamente ninguna indemostrabilidad, pero, por otra parte, si toda expresión es teorema y su negación también es teorema, el sistema axiomático es totalmente inservible, debido al principio de no contradicción. Lo que nos ha permitido el primer metateorema de Gödel es mostrar que si el sistema es consistente entonces tiene que haber en él una proposición verdadera indemostrable. Dicho de otro modo, para todo sistema de la índole que estamos considerando, si el sistema es completo no es consistente, y si es consistente no es completo. Conviene recordar que nos estamos refiriendo a un sistema axiomático en el que el conjunto de los axiomas es decidible, o sea que existe un método tal que, en un número finito de pasos, permite establecer, para cualquier proposición, si ella es o no axioma.

El lector no debe tener la esperanza de que agregando al sistema original un nuevo axioma que sea precisamente la proposición *a* eludamos la dificultad planteada por el primer metateorema de Gödel. Pues el proceso de aritmetización podría aplicarse al nuevo sistema, y en él obtendríamos una nueva proposición *a'* verdadera no demostrable. La reiteración de estas dificultades muestra que la es-

3 Recuérdese lo afirmado en la nota 4 del Capítulo 15 a propósito de Gentzen, quien demostró, en términos neointuicionistas, la consistencia de la aritmética a condición de admitir ideas más "fuertes" que las del sistema de Peano y por ende más "sospechosas de inconsistencia". Esto no sólo ocurre con el sistema de Peano, sino también con cualquier otro metalenguaje que pretenda demostrar la consistencia de un dado sistema axiomático en general.

trategia no impedirá que sigamos encontrando más y más proposiciones verdaderas no demostrables a medida que vayamos realizando nuevas ampliaciones.

Los metateoremas de Gödel tienen además de las implicaciones ya consideradas, una adicional, pues cabe preguntarse si el sistema axiomático del que nos estamos ocupando es sintácticamente decidible o no, propiedad que hemos presentado en el Capítulo 8. Responder que sí implicaría la existencia, como el lector recordará, de un método constructivo *efectivo*, es decir que permita contestar en forma tajante, en un número finito de pasos, si una cuasiproposión cualquiera del sistema es o no teorema del mismo. Supongamos momentáneamente que así sea. Por el proceso de aritmetización gödeliana de las propiedades sintácticas del sistema, tal metodología debe ser capaz de reflejarse en un proceso *interno al sistema* para decidir si la dada cuasiproposición –o su negación– es teorema. Consideremos la cuasiproposición que expresa internamente que el sistema es consistente, que hemos llamado *c*. Dada nuestra suposición de que el citado método existe, debemos poder decidir si *c* es teorema del sistema o no lo es. Pero no es posible llegar internamente al sistema a la conclusión de que *c* es teorema porque tal cosa contradice el segundo metateorema de Gödel. Tampoco es posible que se muestre internamente que *c* no es teorema, pues ello, de acuerdo con el principio según el cual si una cuasiproposición no es teorema entonces el sistema tiene que ser consistente, resultaría que el sistema sería capaz de establecer que *c* no es teorema y que por lo tanto el sistema es consistente. Pero, nuevamente, por el segundo metateorema de Gödel, no es posible probar internamente la consistencia del sistema. Por consiguiente, el aludido método finitista no puede existir, de donde resulta que el sistema considerado, además de no ser sintácticamente completo, es sintácticamente indecidible.

Como ya adelantamos, los metateoremas de Gödel imponen restricciones a las pretensiones formalistas de la escuela de Hilbert en sentido estricto, basadas en la convicción de que la reducción a sistemas axiomáticos de las teorías de conjuntos conducirían a una reconstrucción completa y consistente de la matemática. Pues ha quedado demostrado que, para cualquier sistema axiomático cuyo conjunto de axiomas sea decidible, si es completo no será consistente, mientras que, a la inversa, si es consistente no será completo. Pese a ello, el programa formalista ha perdurado para fundamentar en forma *hipotética* el conocimiento matemático, como hemos de analizar seguidamente.

Consecuencias filosóficas de los metateoremas de Gödel

Las conclusiones de Gödel han llegado a invadir campos de pensamiento totalmente ajenos a la filosofía y a la fundamentación de la matemática. El propio Gödel se ha ocupado de hallar una formalización del llamado *argumento ontológico* de la existencia de Dios, original de san Anselmo (siglo XI), que se puede encontrar en su *Obra completa* (*Collected Works*, vol. III, p. 403). Pero existen

interpretaciones que, en su mayoría, son absolutamente no pertinentes e incluso ridículas. Señalemos las siguientes, según las cuales a partir de los metateoremas de Gödel se podría inferir que:

(a) la Biblia es incompleta o inconsistente;

(b) ninguna verdad científica es digna de ser admitida;

(c) la constitución de los Estados Unidos es inconsistente;

(d) existe un Ser Supremo;

(e) no existe un Ser Supremo;

(f) las afirmaciones del budismo Zen son incontrovertibles[4].

Pero analicemos con seriedad las consecuencias filosóficas de los dos metateoremas de Gödel de 1931: ellas son realmente serias. ¿Por qué investigamos en matemática si no tenemos un procedimiento para probar la consistencia de los sistemas axiomáticos que empleamos en ella? La curiosa respuesta que podemos imaginar, y que implicaría de alguna manera una especie de retorno a la posición del remoto escriba Ahmés, es que cuando desarrollamos un sistema axiomático formal S de la matemática, lo hacemos *hipotéticamente* con la suposición metalingüística de que S es consistente. Esta conjetura no está probada, pero la hipótesis puede ser fecunda en el sentido de que el desarrollo del sistema S, tanto en el ámbito de la matemática pura como en el de la aplicada, permite obtener resultados eficaces.

Todo lo cual es bastante análogo al proceder hipotético deductivo de las ciencias fácticas, por cuanto las teorías científicas que se emplean en ellas, como hemos señalado anteriormente, constan de hipótesis que se admiten transitoriamente por su riqueza hasta tanto no sean refutadas por la experiencia. Del mismo modo, los sistemas axiomáticos formales de la matemática serán desarrollados hasta tanto no presenten inconsistencia. Por consiguiente, insistimos, estamos al parecer en una situación similar a la de Ahmés porque de algún modo comprobamos que *la experiencia interviene para sustentar la hipótesis de que la matemática es consistente*. Aquí la palabra "experiencia" tiene dos sentidos bien diferentes. En un sentido estrecho, nos referimos a que existen modelos hipotético deductivos muy corroborados que apoyan, aunque no prueban, la consistencia del sistema. Pero en un sentido distinto y más amplio, puede decirse que la tarea del matemático, cuando desarrolla suficientemente el sistema sin hallar inconsistencia, refuerza su "confianza" en que aquél será consistente. Desde luego, si se llegara a probar más adelante que ello no ocurre, el sistema deberá ser abandonado.

4 Algunos de estos ejemplos han sido extraídos de la página web http://www.sm.luth.se/~torkel/eget/Gödel.html.

Sobre la consistencia de la matemática y de la lógica: la situación actual

La filosofía de la matemática, señalábamos en el Capítulo 1, se vincula estrechamente con su fundamentación, en el sentido de que es necesario probar que las creencias que sustentamos sobre los temas de competencia de la disciplina son fiables y especialmente que no llevan a contradicción. Éstos son los problemas de consistencia que, como hemos analizado anteriormente, se pueden resolver en forma relativa para un sistema axiomático formal mostrando que tiene modelos. Sin embargo, todo modelo que utilicemos está vinculado con otro sistema axiomático, por lo cual su existencia no demuestra una consistencia *absoluta* sino *relativa*. El problema filosófico central de la fundamentación de la matemática es el de establecer si es posible hallar una demostración absoluta de la consistencia de la disciplina, la cual, en último término, se reduce al problema de la consistencia de la aritmética, si bien para los formalistas en sentido estricto esta exigencia habrá que trasladarla al problema de la consistencia de los sistemas axiomáticos de la teoría de conjuntos.

La idea de Frege y Russell era que para el sistema axiomático de la aritmética, al cual hemos reducido todos los demás sistemas de la matemática por el método de la consistencia relativa, admite aparentemente un modelo lógico. Ello dio lugar a la aparición de la tesis logicista, según la cual la matemática se reduce a la lógica. Dicho de otro modo, sería posible construir un diccionario que transforme los términos de la teoría aritmética (y de toda la matemática en general) en términos lógicos, y también que los axiomas aritméticos se puedan considerar, después de esta transformación, derivables de principios lógicos. Pero el problema es que nuestra confianza en una demostración de consistencia absoluta a través de modelos lógicos quedó resentida por la aparición de las antinomias. Pese a los esfuerzos que se han efectuado para resolverlas, no hay unanimidad acerca de la solución de las mismas, de modo que el problema de la consistencia de la matemática aún permanece irresuelto.

Con relación a la consistencia de la lógica, nos encontramos en la actualidad con las siguientes peculiaridades:

(a) *Lógica elemental.* Cierto tipo de teoremas, uno de ellos debido a Gödel (1930), ofrecen razones lo suficientemente satisfactorias como para suponer que ella (la lógica proposicional y la lógica elemental de predicados) no puede llevar a contradicción.

(b) *Lógica superior.* Para la teoría de los tipos y, en general, para las soluciones ontológico-semánticas de Russell, como para cualquier otra lógica superior, pueden ser aplicados los resultados de Gödel, ya que en todos estos casos la aritmética está contenida en tales lógicas. Por tanto, el problema de su consistencia no puede ser resuelto.

(c) *Teorías axiomáticas de conjuntos.* Un producto importante que nos han dejado estas teorías, a partir de la original de Zermelo, es que *gran parte* de la matemática se puede reducir a la teoría de conjuntos. Sin embargo, la consistencia de las mismas aún no ha sido probada. m

Después de las consideraciones que nos han ocupado a lo largo de este libro parece oportuno hacer una revisión sintética de alguno de los problemas que hemos expuesto a propósito de la naturaleza de la matemática desde un punto de vista filosófico. El lector quizá sienta perplejidad o asombro si antes de leerlo adoptaba lo que podemos llamar la "concepción tradicional de la ciencia", de la cual no parecen emerger cuestiones problemáticas, vinculadas con su fundamentación y su filosofía, del género que hemos considerado en el caso particular de la matemática. Nos parece adecuado por tanto indicar en el próximo y último capítulo algunas relaciones entre filosofía y matemática que, precisamente, cuestionan aquella concepción habitual en cuanto a que la matemática y la filosofía serían en principio dos disciplinas con muy poco en común. Los ejemplos que presentaremos, ya tratados en mayor o menor medida anteriormente, pretenden mostrar exactamente lo contrario.

Filosofía y matemática: una relación compleja

Objetos *versus* esquemas

En la visión tradicional de la ciencia se admitía implícitamente que los científicos estudian invariablemente propiedades y características de ciertas entidades u objetos. Resulta extraño que en la concepción de la matemática pura como desarrollo de sistemas axiomáticos, tal como la hemos presentado, afirmemos que tal cosa no ocurre, pues los términos de un sistema no tienen una designación fija y las afirmaciones que hallamos en ellos son en realidad formas puramente sintácticas, que sólo respetan reglas morfológicas previamente establecidas para construir sucesiones de signos. De acuerdo con lo anterior, las cuasiproposiciones de la matemática pura no hablan acerca de *nada*, en contra de la idea intuitiva de que toda afirmación científica debería hacerlo.

Curiosamente, la noción que se halla implícita en esta metodología axiomática tiene fuerte analogía, como ya lo hemos señalado, con la manera en que Aristóteles desarrolla su sistema de lógica. Según ciertos autores, la presentación que de ésta hace el gran filósofo expresaría, al menos en parte, la influencia de matemáticos de orientación platónica tales como Eudoxo y Teetetos. Dada la importancia de ello, el lector sabrá disculpar que insistamos en este punto, del cual nos hemos ocupado en el Capítulo 6 a propósito de la segunda acepción que otorgábamos a la palabra "formal". Recordemos que la exposición aristotélica no considera ejemplos particulares y determinados de razonamientos (como por ejemplo "todos los músicos son artistas", "todos los flautistas son músicos", luego "todos los flautistas son artistas"), sino que lleva a cabo el estudio de esquemas de razonamientos (del tipo "todos los m son p", "todos los s son m", luego "todos los s son p"). Aristóteles introduce por tanto, en su modo de operar con la lógica, un recurso matemático que le ha dado a ella una "fuerza" especial: el uso de variables. Por lo que hoy conocemos, ciertos escritos de Aristóteles constituyen los primeros documentos en los que en lugar de nombres propios o términos determinados se emplean variables, es decir, términos sin designación pero cuya categoría ya ha sido establecida y a las que se les puede dar distintas interpretaciones. Y así como en matemática interesa fundamentalmente señalar que $x + y = y + x$ y no detenerse en ejemplos particulares tales como $5+7 = 7+5$, en el pensamiento lógico de Aristóteles m, p y s desempeñan

un papel similar al de x e y. No tienen una designación determinada, pero sabemos que pueden ser reemplazados por términos genéricos tales como "flautista", "músico" y "artista" o bien por "griego", "hombre" y "mortal".

¿Qué puede justificar esta manera de operar? Un esquema de razonamiento se puede ejemplificar de múltiples maneras; más aún, también por analogía con $x + y = y + x$, si el esquema es correcto sus ejemplos o casos particulares deben también serlo. Tratar con esquemas es una manera de "matar gran cantidad de pájaros de un tiro", recordando que la "corrección" del esquema significa que nunca generaría un ejemplo con premisas verdaderas y conclusión falsa. Podría decirse metafóricamente, como ya indicamos anteriormente, que Aristóteles no se ocupa realmente de razonamientos sino de "hormas" o "moldes" de razonamientos, tratando de encontrar cuáles son aquéllos que siempre proporcionarán ejemplos o casos particulares correctos. Vale la pena insistir en que el gran filósofo, al adoptar esta metodología, se adelanta de manera sorprendente a métodos que en la matemática o en las lógicas contemporáneas emplean este tipo de recursos. No está mal recordar, a manera de homenaje, que él fue el primero en introducir variables y esquemas de razonamientos en el estudio sistemático de ciertos tópicos de lógica, algo que hoy es moneda corriente.

Pero ocurre que la noción de sistema axiomático formal involucra algo totalmente análogo: los términos primitivos del mismo, al igual que las variables de Aristóteles, tienen categoría lógica pero no designación fija, por lo cual todos los axiomas y teoremas de un sistema son en realidad esquemas de aquellas afirmaciones que puedan de algún modo ejemplificarlas. Así entendido, un sistema axiomático es también, entonces, un "molde" u "horma" de proposiciones científicas. Sin embargo, hallamos aquí una diferencia: cuando Aristóteles discurría, los "moldes" estudiados deberían ofrecer sin excepción razonamientos que no tienen premisas verdaderas y conclusión falsa; pero en un sistema axiomático en general no se pretende que toda ejemplificación del sistema proporcione verdades para axiomas y teoremas. El propósito es más restringido. Se define ante todo cuáles son las interpretaciones posibles del sistema axiomático para limitarse luego a escoger solamente las "correctas", es decir, los modelos de aquél. De este modo, lo que hemos encontrado es que la matemática pura de los sistemas axiomáticos es una investigación *formal* en el mismo sentido en que la lógica de Aristóteles era formal en una de las cinco acepciones a las que nos hemos referido en el Capítulo 6, la segunda.

A la luz de consideraciones que hemos formulado anteriormente, el lector podría preguntar: pero la matemática ¿no se ocupa *en algún sentido* realmente del estudio de ciertos objetos, los objetos matemáticos? La respuesta es que si formulamos una determinada interpretación de un sistema axiomático, y si ésta resulta ser un modelo del mismo, estamos obteniendo el conocimiento de los objetos de los que habla la interpretación, que pueden ser de muy distinta naturaleza según qué interpretación estemos considerando. En tanto no se trate de matemática aplicada y modelos, los sistemas axiomáticos serían una manera

de mostrar qué debería cumplirse en un determinado ámbito ontológico si hacemos la suposición (de carácter puramente lógico) de que en él se satisfacen las condiciones expresadas por las cuasiproposiciones que se han escogido como axiomas. No sería desafortunado pensar, por tanto, que el estudio de un sistema axiomático es algo así como el estudio sistemático y simultáneo acerca de qué ocurre en *todos* sus modelos.

La matemática en auxilio de la filosofía: Aquiles y la tortuga

En el Capítulo 2 señalábamos la falacia que implica el notable argumento de Zenón acerca de Aquiles y la tortuga, que no pudo ser desenmascarado hasta el siglo XIX pese a que el rompecabezas fue analizado durante dos milenios por innumerables filósofos. En particular, el mérito corresponde a Cantor, con su introducción de la noción de "conjunto infinito", caracterizado por la propiedad de que *el todo no es mayor que algunas de sus partes*. Esta propiedad, claramente contraria al sentido común (habituado a tratar con la aritmética finita), había sido ya prefigurada por Galileo en un notable fragmento de la Primera Jornada de su libro *Consideraciones sobre dos nuevas ciencias* (1638):

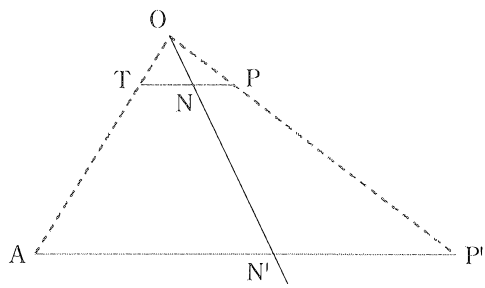
> [...] Es infinita la totalidad de los números, infinitos los cuadrados, infinitas sus raíces; pero la multitud de cuadrados no es menor que la totalidad de los números, ni ésta mayor que aquélla, y en última instancia, los atributos de "igual", "mayor" y "menor", no tienen lugar en los infinitos, sino sólo en las cantidades limitadas. Por ello, cuando se me presentan varias líneas [segmentos] desiguales, y se me pregunta cómo puede ser que no haya en las mayores más puntos que en las menores, yo le respondo que no hay más, ni menos, ni tantos, sino infinitos en cada una[1].

Precisamente, la propiedad que señala Galileo de que, dados dos segmentos cualesquiera, hay el mismo número (infinito) de puntos en todos ellos, invalida el argumento de Zenón acerca de Aquiles y la tortuga. En efecto, recordemos que la conclusión que obtiene el filósofo griego es que el número de puntos de AP y el número de puntos de TP ha de ser el mismo, lo cual, a su juicio,

1 Citado por Boido, G., *Noticias del planeta Tierra*, p. 272. (Adaptación.)

entra en contradicción con la afirmación de que AP es mayor que TP: el todo resulta ser igual a la parte. (Véase el Capítulo 2.) Para Zenón, ello es un absurdo, y por consiguiente Aquiles nunca alcanzará a la tortuga.

Pero para Galileo (y Cantor) tal contradicción no existe, pues AP y TP son conjuntos infinitos de puntos, y en AP hay el mismo número de puntos que en TP. Ello se puede comprobar "rearmando" la figura anterior y construyendo la siguiente:



En la figura, AP' es igual al segmento AP de la figura anterior y O resulta de la intersección de las prolongaciones de AT y de P'P. Dado un punto *cualquiera* de TP, por caso N, la prolongación de ON corta a AP' en un punto N' de éste. Ello establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de TP y los de AP' y, por tanto, ambos segmentos tienen el mismo número (infinito) de puntos, a pesar de que TP es menor que AP'. Cantor demostró que este número transfinito es el que concierne al conjunto (infinito) de los números reales, $\aleph$ (*alef*); como se afirma habitualmente, TP y AP' *tienen la misma cardinalidad*.

Cabe señalar que el argumento de Zenón puede ser invalidado también empleando una noción desarrollada en el siglo XIX, la de *límite de una sucesión infinita*, acerca de lo cual no entraremos en detalle. Lo que nos importa destacar es que un problema filosófico que desveló a los filósofos durante muchos siglos fue resuelto finalmente por medio de consideraciones matemáticas.

La proyección del constructivismo matemático en la filosofía

Puede ser oportuno ahora señalar que la "aritmetización de la matemática" tuvo en su momento consecuencias filosóficas en el pensamiento de muchos filósofos, entre ellos Bertrand Russell. Si recordamos las peripecias que se pre-

sentan en el aludido proceso de aritmetización, el lector puede advertir que procedimientos lógico-constructivos permiten ir reduciendo estructuras aritméticas complicadas a otras de carácter más simple. Así fue que pudimos reducir la aritmética de los números reales a la de los racionales mediante ingeniosos métodos como el de las cortaduras de Dedekind. También señalamos cómo la aritmética de los números racionales se reduce a la de los enteros y ésta finalmente a la de los números naturales. En este sentido resultaría que si disponemos de la aritmética de los números naturales podríamos, mediante procedimientos lógicos (formación de pares ordenados, clases de equivalencia, etc.), edificar gran parte de la matemática clásica. Este resultado fue entendido como un triunfo de la utilización de un pensamiento riguroso en ciencia para evitar innecesarias cuestiones metafísicas. Pero también llevó a Russell y a los miembros del primitivo empirismo lógico a pensar que podría hacerse algo análogo en la filosofía general y en particular en cuestiones vinculadas con la metafísica. Por ejemplo, en lugar de partir de los números naturales, podríamos considerar entidades intuitivamente tan simples como las sensaciones (o bien, análogamente, los llamados "datos duros" de los que habla Russell) y entonces resultaría que con la utilización de la lógica podría construirse a partir de estas entidades simples o básicas el resto o al menos la gran mayoría de las entidades básicas consideradas por la filosofía y especialmente por la metafísica.

Esto llevaría a una filosofía exacta con nociones bien definidas y nítidamente compuestas, eliminando vagas, imprecisas y estériles discusiones metafísicas. Indudablemente, partir de sensaciones implica ser empirista, pero a este empirismo se le añaden los poderosos instrumentos de la lógica contemporánea. (No meramente los de la lógica tradicional aristotélica.) De ahí el nombre de "empirismo lógico" adjudicado a dicha escuela filosófica. Tal punto de vista se lo puede encontrar en dos libros de Russell, *Misticismo y lógica* y *Nuestro conocimiento del mundo externo*. Pero el texto más notable en esta dirección es uno de los primeros libros de Rudolf Carnap, *La construcción lógica del mundo* (1928), un denodado esfuerzo filosófico donde se proponen definiciones lógicamente constructivas de las entidades de la física y también (lo que no es fácil) de la psicología. Si bien paulatinamente se advirtió que este programa planteaba grandes dificultades, lo que nos interesa destacar es que todo ello, que en su momento tuvo notable influencia, fue el resultado del intento de trasvasar el éxito del constructivismo lógico empleado en la fundamentación de la matemática a un ámbito filosófico.

Platón y el realismo matemático

Hasta aquí hemos comprobado que nuestro intento de responder la primera de las cuatro preguntas sobre la matemática (¿de qué entidades se ocupa?) no admite una contestación simple e intuitiva sino una más elaborada que presupone

el análisis del método axiomático formal y en particular de la naturaleza semiótica tanto de los sistemas axiomáticos como de sus interpretaciones. Para que el lector advierta con claridad cómo una determinada posición filosófica o metafísica puede influir en la visión de los problemas de la epistemología y la fundamentación de la matemática, vale la pena señalar lo siguiente: si somos platonistas y creemos fervorosamente en las entidades del segundo mundo de Platón, podríamos aducir, muy razonablemente desde tal punto de vista, que los sistemas axiomáticos de la matemática, y en particular el de Peano para los números naturales, hallan su fundamento en el hecho de que en el segundo mundo existen en un sentido absoluto estructuras que *modelizan* tales sistemas. La idea de Cantor y también la del último Gödel, como señalamos en su oportunidad, es que hay una interpretación obvia y platonista de los conjuntos de los que habla la teoría cantoriana, ese esencial instrumento del análisis lógico de la matemática. Los dos estudiosos anteriores podrían aducir que los sistemas axiomáticos de la teoría de conjuntos o algunos de los más sencillos de ellos, como el de Zermelo, son consistentes porque admiten como modelo (en un sentido absoluto de la palabra) los conjuntos formales que habitan en el segundo mundo de Platón.

Esta posición, que hemos llamado *realismo matemático*, es muy interesante pero requiere el cumplimiento de tres condiciones: (1) que se acepte la existencia de las entidades formales del segundo mundo de Platón; (2) que resulte claro de qué manera está constituido ese segundo mundo; y (3) que no hay oculta alguna dificultad lógica, como la que plantean las antinomias, en esta teoría metafísica de las entidades formales. No es sencillo hallar argumentos lapidarios y finales que prueben la existencia del segundo mundo platónico, como se afirma en (1), ni para aceptar los puntos de vista de Cantor y Gödel a propósito de la condición (2), es decir, sobre qué tipo de entidades constituyen esta región ontológica. Pero podemos advertir, en el punto (3), que los peligros que amenazan a la consistencia de la matemática permanecen. Desarrollemos brevemente este punto.

El filósofo austriaco Alexius Meinong (1853-1920), injustamente olvidado en nuestros ambientes académicos, aceptaba que en el segundo mundo de Platón debe existir, para toda combinación conceptual que podamos construir con nuestro lenguaje o pensamiento, una entidad formal correspondiente. Meinong habla de la *existencia* de una entidad que se refiere al mundo concreto (átomo, estrella, plusvalía, libido) pero en cambio emplea la palabra *subsistencia* cuando se refiere a la entidad del mundo formal. Aunque no exista en el mundo real, el mítico centauro *subsiste* (en el segundo mundo platónico). Esta concepción, notablemente atractiva, plantea inmediatamente la dificultad de que en el segundo mundo podrían existir entidades contradictorias. Por ejemplo, una combinación de palabras que darían subsistencia a una correspondiente entidad del segundo mundo podría ser "la única persona que está en la puerta de esta habitación, parada a la *derecha* de esa puerta" (entidad que subsiste, independiente-

mente de que exista o no) pero lo análogo acontece también con la combinación de palabras "la única persona que está en la puerta de esta habitación, parada a la *izquierda* de esa puerta". Tampoco aquí hay necesariamente existencia pero sí subsistencia. Adviértase que las dos entidades subsistentes que hemos introducido son contradictorias entre sí, porque si una de ellas existe, la otra no puede existir; pero de todos modos, para Meinong, ambas están presentes en el segundo mundo platónico: lo deja impávido que el segundo mundo, alegremente, sea un mundo con contradicciones.

Como otros puntos de vista metafísicos, pudiera haber algo de razonable en esta creencia, pero para nuestros propósitos resulta que el segundo mundo de Platón no es consistente (es decir, podría haber en él entidades contradictorias) y, si esto es así, dicho mundo no tiene la menor utilidad para probar en sentido absoluto la consistencia de nuestros sistemas axiomáticos y en particular la de las teorías axiomáticas de conjuntos. Todo lo señalado nos mueve a admitir verosímilmente que esta manera de pensar es un inútil exceso metafísico y que conviene, en materia de modelos y consistencia, adoptar la posición más prudente que concibe a los problemas de consistencia más como una cuestión relativa que filosóficamente absoluta, la cual, como el lector habrá advertido, se acerca más a nuestra posición, expresada en las consideraciones ofrecidas en este libro.

¿Qué clase de conocimiento proporciona la matemática?

El lector recordará que, en el marco de nuestra segunda pregunta, inquiríamos por qué aceptamos las proposiciones de la matemática, o bien, lo que es equivalente, cuáles serían las razones que nos permitirían considerar verdaderas las proposiciones de esta disciplina. Pero después de todo lo que hemos expuesto sabemos que esta preocupación no tiene sentido frente al hecho de que la matemática pura está constituida por sistemas axiomáticos formales. Aquí lo único que cabe preguntar es por qué, en una dada investigación, hemos decidido aceptar, entre infinitos sistemas axiomáticos posibles, el que está bajo nuestra consideración. Curiosamente, la respuesta no puede ser directamente vinculada con la noción de "verdad" (en el sentido original de Aristóteles) porque esta noción es semántica, en tanto que un sistema axiomático formal es una entidad lógico-lingüística de carácter sintáctico. Pero si "aceptar" significa haber escogido tal o cual sistema axiomático, una respuesta totalmente legítima podrá ser "porque me resulta bello" u otras razones semejantes a las que llevan a la elección de una obra de arte. O puede ocurrir, como sucede con los pasatiempos que proponen las ediciones dominicales de los diarios, que un sistema axiomático sea contemplado como un problema, un desafío intelectual al que por razones "deportivo-intelectuales" es necesario resolver. También debe admitirse

dio de un sistema axiomático puede estar motivado por el hecho de ...guna de sus interpretaciones se vincule con problemas de física o de alguna otra ciencia fáctica en los que radique nuestro verdadero interés. Muchos de los sistemas axiomáticos han surgido en el intento de imponer un orden a una serie de conocimientos dispersos pero interesantes e importantes relacionados algunas veces incluso con problemas prácticos o tecnológicos. De todas maneras, el motivo por el cual se elige investigar un determinado sistema axiomático en el ámbito de la matemática pura es meramente convencional y, con las correspondientes salvedades, no es muy diferente de la que nos lleva a escoger entre jugar al ajedrez y no a las damas.

La tercera de nuestras preguntas, acerca de los modos de incrementar el conocimiento matemático, admite variadas contestaciones que involucran incluso actividades de muy distinta naturaleza. En primer lugar debemos citar la creación o descubrimiento de nuevos sistemas axiomáticos. Indudablemente, ello involucra cuestiones de creatividad y también se relaciona con la afirmación a veces sorprendente de que la matemática es el reino de la libertad de pensamiento. Esto último no puede ser tomado al pie de la letra, pues el que una cuasiproposición sea teorema en un sistema no es cuestión libre ni arbitraria; de allí proviene la sensación contraria de que la matemática, de algún modo, nos encadena con el rigor y el uso de las leyes del razonamiento correcto. Se podría argumentar entonces que la libertad de creación matemática no es "entera" porque a las reglas que debemos respetar para construir un sistema axiomático se agregan exigencias de consistencia y simplicidad. Pero también en música, por caso, hay requerimientos de armonía y consonancia, lo cual no afecta la libertad en materia de producción artística. Ya señalamos, por otra parte, que en matemática pura también se gana conocimiento cuando se establece que una cuasiproposición es teorema en un ya dado sistema axiomático. Un ejemplo célebre, que ha provocado gran alboroto desde el siglo XVII, fue la dificultad de demostrar el último teorema de Fermat, que mencionamos en la nota 1 del Capítulo 11.

Señalamos anteriormente la importancia de obtener no ya conocimiento por medio de un sistema axiomático sino también *metaconocimiento* acerca de él. En este sentido, el conocimiento puede consistir en llegar a establecer si un sistema es consistente o no lo es, o incluso concluir que la cuestión no puede zanjarse. Muy interesante es el caso de tratar de mostrar en un sistema, para una dada cuasiproposición, cuáles son las otras cuasiproposiciones del sistema que le son lógicamente equivalentes. Los matemáticos y lógicos dedicados a este tipo de investigación son muy numerosos. Por ejemplo, en la teoría axiomática de conjuntos, establecer cuáles son las cuasiproposiciones equivalentes al llamado "axioma de elección" es tarea que ha despertado mucho entusiasmo y que ha llevado a centenares de resultados. Esto se puede comprobar si se consulta el texto de Herman y Jean E. Rubin titulado *Equivalentes al axioma de elección* (1963). Otra situación análoga es la planteada por la llamada "hipótesis del continuo", desarrollada en detalle en el libro *Hipótesis del continuo* de Waclaw Sierpinski (1934).

Un tipo de investigación que puede producir resultados interesantes es determinar si en un dado sistema axiomático uno de los axiomas es independiente de los restantes. Si resulta así, es evidente que se produce una situación análoga a la de la aparición de las geometrías no euclideanas, porque tendríamos por una parte el sistema axiomático original y por otra el nuevo, con los axiomas del primero salvo el independiente, que ahora se propone negado. Naturalmente, permanece la cuestión acerca de si los dos sistemas alternativos que estamos considerando son o no consistentes. Finalmente, otro estudio relevante es establecer si dos sistemas axiomáticos distintos son o no lógicamente equivalentes, es decir, que los términos de uno pueden definirse en el otro y viceversa, y que los axiomas de uno son teoremas del otro y viceversa. Habría aquí también que señalar que a veces se ha intentado establecer si ante un sistema axiomático complicado no se puede producir otro más sencillo que resultara igualmente útil. Así, por ejemplo, existe un sistema axiomático para la aritmética creado por el lógico y matemático alemán Abraham Robinson que es más simple y débil que el de Peano: carece del axioma de inducción. Pero con él es posible, sin embargo, establecer importantes teoremas, incluyendo los metateoremas de Gödel.

Matemática y realidad

Respecto de nuestra cuarta pregunta, la de las relaciones entre la matemática (de los sistemas axiomáticos formales) con la realidad concreta, el lector habrá advertido que en este texto, repetidamente, se ha afirmado que tal relación existe y es muy importante. Consiste en que el conocimiento de lo real concreto se presenta muy corrientemente en ciencia como interpretaciones "adecuadas" o modelos de los sistemas axiomáticos. De hecho, el estudio de los sistemas axiomáticos resulta ser una suerte de estrategia para estudiar, a la vez, todos sus posibles modelos. Inversamente, si disponemos de un conjunto no totalmente jerarquizado lógicamente de verdades sobre la realidad concreta, hallado por caso por un físico, un biólogo o un economista, es útil buscar algún sistema axiomático formal que admita tal conjunto de verdades como constituyendo un modelo del sistema: éste es el proceso de *formalización* al que hemos hecho referencia en el Capítulo 8. En resumen, la relación entre matemática y mundo real concreto es que los sistemas axiomáticos imponen una jerarquía y orden lógico a los conocimientos un tanto dispersos que pudiésemos tener sobre lo real.

Destaquemos que, cuando se habla en general de *interpretación* de un sistema axiomático podemos hallarnos ante tres posibilidades:

(1) que el modelo sea *relativo* e interprete el sistema dado sobre otro sistema na
axiomático. Aquí no hay realmente cuestiones de verdad o falsedad sino más bien
acerca de cómo las relaciones lógicas entre las cuasiproposiciones se reflejan

o traducen en las relaciones lógicas de las cuasiproposiciones del segundo sistema. El interés de este tipo de modelos radica en la posibilidad de construir pruebas de consistencia relativa, pero no es un tópico que relacione a la matemática con la realidad concreta. Podría decirse que con respecto a la matemática éste es un asunto puramente interno, una cuestión de carácter "doméstico".

(2) que el modelo interprete las cuasiproposiciones como verdades sobre la la realidad en un sentido liso y llano. Se trata de modelos que hemos llamado "modelos absolutos". Pero aquí encontramos la dificultad de que, salvo ciertas cuestiones de carácter elemental y finito, no es posible hallar verdades absolutas e incontrovertibles en el terreno de las ciencias fácticas. En general, las proposiciones universales (por ejemplo, las leyes de la física) no pueden ser verificadas concluyentemente, es decir, de ellas no se puede afirmar rotundamente su verdad: son hipótesis.

(3) que el modelo, como consecuencia de lo anterior, sea un "modelo hipo- po- tético", tal como lo hemos caracterizado en el Capítulo 9, caso en el cual los axiomas y teoremas se transforman en adecuadas hipótesis de las ciencias fácticas. Como se sabe, esto es lo que ha llevado a los científicos fácticos a construir los sistemas hipotético deductivos, en que las hipótesis de una teoría se ordenan lógicamente partiendo de "principios" o "hipótesis fundamentales" para deducir a partir de allí las restantes "hipótesis derivadas". Pero si es así, el lector no tendrá dificultad en advertir que una interpretación de un sistema axiomático en el reino de las hipótesis produce precisamente sistemas hipotéticos deductivos. Claro que no podemos saber si las hipótesis son verdaderas y por ello los modelos hipotéticos no son absolutos y no permiten probar la consistencia salvo en un sentido relativo. De todos modos, esta relación íntima entre sistemas axiomáticos formales y sistemas hipotéticos deductivos constituye una señal de la íntima relación que existe entre la matemática y el estudio científico de la realidad fáctica. Vale la pena, una vez más, hacer notar que el matemático que desarrolla un sistema axiomático se adelanta de una manera generosa a las actividades del científico fáctico. Porque, cuando este último advierte que una interpretación de ese sistema proporciona adecuadas hipótesis de partida, recibe a modo de obsequio e inevitablemente un abundante conjunto de hipótesis derivadas que el matemático ya encontró como teoremas. Debemos tomar en cuenta estas consideraciones para comprender por qué la matemática es pertinente y útil para el estudio de la realidad fáctica.

Términos matemáticos y términos fácticos

Para el lector interesado, señalaremos ahora algunos aspectos más sofisticados y complejos de la cuestión anterior: las relaciones de la matemática con las

ciencias fácticas son en realidad algo más intrincadas. Comencemos por destacar que cuando se construye un sistema hipotético deductivo habrá que tener en cuenta y utilizar teorías presupuestas, sin la ayuda de las cuales no será en principio posible ni siquiera expresar las hipótesis del sistema. Las teorías presupuestas por un sistema hipotético deductivo pueden ser de muy diversa índole. Por ejemplo, para la física, parece inevitable utilizar un sistema lógico para la deducción pero también alguna teoría matemática para tratar con nociones numéricas, geométricas o algebraicas. Ello hace que, como lenguaje, la estructura de un sistema hipotético deductivo será en general un tanto complicada. Encontraremos hipótesis puramente fácticas en el sentido de que ellas afirman algo acerca de determinadas entidades concretas (por lo cual pueden ser verdaderas o falsas) pero habrá además lo que podemos llamar "cuasiproposiciones"; serán aquellas hipótesis que combinen términos fácticos con términos extraídos de las teorías matemáticas presupuestas. Como éstas no tienen designación, resultaría que tales hipótesis no son genuinas proposiciones sino que en cierto sentido su significado está "abierto" a la espera de que se indique cómo interpretamos los términos matemáticos. Sin duda habrá además cuasiproposiciones matemáticas "puras". Si esto es así, hay que reconocer que un sistema hipotético deductivo es en realidad también un discurso si no enteramente formal al menos "semiformal". En parte es puramente sintáctico y en parte no lo es.

Nos preguntamos ahora por qué no interpretamos de una manera determinada los términos matemáticos. La respuesta es: porque en general no es necesario. El físico no tiene necesidad de encontrar una solución o adoptar un determinado punto de vista ante el problema de *qué son* los números u otras entidades empleadas por los matemáticos. Le basta saber que los números o cualquier otra entidad matemática tienen ciertas propiedades y ello será suficiente para proponer y deducir hipótesis fácticas. Desde este punto de vista, podría pensarse que el uso de la matemática por los físicos es en el fondo puramente instrumental, en el que no intervienen las cuestiones de ontología del discurso matemático sino únicamente su extraña capacidad lógica para ayudarnos a encontrar hipótesis acertadas sobre la realidad concreta. De ser así, se advierte una relación entre matemática y ciencia fáctica que va más allá de la noción de modelo y que subraya la notable capacidad instrumental que tiene el discurso matemático.

Si pretendemos ser aún más precisos, es necesario indicar que si bien en los sistemas axiomáticos los términos carecen de designación, en cierto sentido admiten lo que pudiéramos llamar "significado formal". Éste sería el que permite detectar acerca de qué tipo de entidades estaríamos hablando sobre la base de las condiciones que tienen que cumplir ante la necesidad de completar la semántica del sistema. Si esto es así, en el momento en que se yuxtapone el lenguaje matemático presupuesto con el lenguaje fáctico podemos muy bien pensar que las hipótesis mixtas, que vinculan términos matemáticos con términos fácticos, contribuyen a precisar y ampliar el significado semiformal de los términos

matemáticos. Ello puede llevar a tres posiciones distintas sobre la naturaleza de las auténticas relaciones entre el lenguaje matemático y el lenguaje fáctico. La primera posición declara lisa y llanamente que la adopción de una hipótesis mixta no altera ni modifica en absoluto los significados de los términos que estamos empleando. Aquello de lo que habla un físico es claro desde un punto de vista físico y no altera el sentido de los términos matemáticos que el físico utilice. Una segunda posición consistiría en admitir que la parte fáctica de un sistema hipotético deductivo influye por completo y construye el significado de los términos matemáticos y aun lógicos que estamos empleando. Esta posición, creemos, está estrechamente relacionada con la de muchos epistemólogos que adhieren al materialismo dialéctico, para los cuales las ideas nacen de la práctica cotidiana y social y lo abstracto es una suerte de subproducto derivado o construido a partir de aquellas ideas. Pero no hay que creer que son los únicos que pudieran así pensar. Los neointuicionistas, como el lector recordará, verían también con simpatía la idea de que los términos lógicos y matemáticos deriven de construcciones a partir de elementos de nuestro pensamiento que primariamente son de naturaleza psicológica. Quizá por ello no sea un error afirmar, como muchas veces se ha hecho, que los neointuicionistas constituyen una peculiar especie de empiristas.

Cabe señalar que en física aparecen a menudo términos geométricos, los cuales, como ha observado acertadamente Einstein, en el discurso de los físicos tienen un carácter más fáctico que matemático. Se habla, por ejemplo, del espacio real en el que estamos inmersos y de sus propiedades fundamentales, que ahora no serían ya postulados formales sino hipótesis de partida para la física. Einstein ha condensado esta concepción afirmando que *la geometría es física*. Sin pretender analizar cuidadosamente el *status* epistemológico de tales cuestiones, apuntemos que las cosas cambian notablemente según cómo se decida interpretar el significado de ciertos términos. Si pensamos, por ejemplo, en la mecánica newtoniana, interpretar "partícula" solamente como una noción formal agregada a las presupuestas, no estaremos en realidad en el campo físico sino en el matemático; o bien, dicho con mayor precisión, produciendo fisicomatemática. Pero es posible que "partícula" tenga un sentido fáctico determinado y en este sentido la teoría de las partículas sería más bien un sistema hipotético deductivo. No hay que desconocer que en ciertos casos conviene la formulación fisicomatemática porque ello ofrece libertad para que "partícula" sea interpretada de diversas maneras: a veces las partículas son entendidas como entidades subatómicas, a veces como granos de polen, a veces como estrellas e incluso, a veces, como galaxias.

La tercera posibilidad en cuanto a las relaciones semánticas entre términos matemáticos y términos fácticos consistiría en admitir que, a través de las hipótesis que utilizan ambos términos simultáneamente, el vocabulario matemático influye grandemente, o tal vez por completo, en el significado de los términos fácticos. Un punto de vista como éste fue sostenido en su momento por quien

en un tiempo fue astrónomo real de Inglaterra, sir James Jeans. En su libro *El misterioso universo* sostiene la tesis, no del todo clara, de que la naturaleza metafísica del universo es de carácter matemático y que todo lo que fácticamente puede decirse de él debe derivarse de las estructuras matemáticas involucradas. Si no hemos entendido mal, esta tesis no solamente agradaría al propio Pitágoras y sus adeptos (a veces descontrolados, como Arthur Koestler en su libro *Los sonámbulos*) sino también al propio Einstein, quien alguna vez dijo: "Es mi convicción que la construcción matemática *pura* es lo que nos da la clave para entender los fenómenos de la naturaleza, y le permite a uno descubrir los conceptos y las leyes que los vinculan." En este punto, debemos reconocer un aspecto razonable en la cuestión: es muy probable que no podamos construir un lenguaje fáctico sin apoyarnos en conceptos matemáticos puros. Por ejemplo, es lo que ocurriría si tenemos que emplear el concepto de "rueda", que parece no poder ser introducido si no disponemos previamente del de "círculo". Finalmente, digamos que no es fácil optar por una de las tres posiciones, en particular porque en principio podría admitirse la aceptación de todas ellas según el caso particular considerado. Lo que aquí se muestra es que las relaciones entre matemática y realidad tienen una estructura mucho más compleja de la que en principio se podría sospechar.

¿Tiene sentido investigar en matemática?

El lector, al finalizar la lectura de este libro, puede quedar sumido en un estado de desasosiego ante la gran cantidad de problemas no resueltos y controversias que suscitan la fundamentación y la filosofía de la matemática. Bastaría recordar que ninguna de las cuatro posiciones filosóficas acerca de la naturaleza de la matemática que hemos presentado en el Capítulo 16, el realismo matemático, el logicismo, el intuicionismo y el formalismo, pueden reivindicar el mérito de haber resuelto tales dificultades. Así, por caso, el realismo matemático requiere la admisión de la existencia del segundo mundo de Platón, algo más que discutible. Por su parte, el logicismo se enfrenta al problema de las antinomias y al de que se carece de una única disciplina lógica confiable. El intuicionismo sólo permite una matemática muy "debilitada" e insuficiente para su aplicación a la física. Finalmente, el formalismo ha sufrido un duro traspié a raíz de las limitaciones establecidas por los metateoremas de Gödel.

Ahora bien, estas dificultades filosóficas no son patrimonio exclusivo de la matemática, pues en el ámbito de las ciencias fácticas se presentan otras de igual gravedad, aunque de muy distinta naturaleza, como el lector puede comprobar si se adentra en los cuestionamientos que se le han hecho, a partir de mediados del siglo XX, al método hipotético deductivo y las nuevas propuestas epistemológicas derivadas de tales críticas. ¿Diríamos entonces que, ante esta situación, ya no es posible investigar en física o biología? Responder negativamente

sería un dislate. Y lo mismo sucede con la matemática, que proporciona una increíble cantidad de conocimientos. La investigación en matemática pura no se ve afectada por los inconvenientes filosóficos anteriores: su amplio campo de posibilidades no ha mermado por ello. Continúa siendo un reino de libertad y creatividad, y sus aplicaciones a otras ciencias y a la tecnología no han dejado de ser fructíferas para el desarrollo del mundo moderno.

Cierto es que los problemas de la filosofía de la matemática se han vuelto extremadamente complejos y controvertidos, lo cual sigue convocando en la actualidad a una multitud de especialistas en búsqueda de nuevos análisis y nuevas perspectivas. Tales problemas expresan por otra parte el poder de la razón humana para ponerlos en evidencia y proponerles soluciones. Y en cuanto a su complejidad, es necesario asumirla si se quiere adoptar aquella recomendación de Pierre Thuillier: es preferible una pregunta bien planteada a una seudorrespuesta basada en alguna pretendida fórmula maestra que lo resuelve todo.

Apéndice

El álgebra de Boole como ampliación del sistema SAFO

Expondremos una presentación del álgebra de Boole, mencionada en el Capítulo 9, a partir de una *ampliación* del sistema axiomático SAFO. Recordemos que aquél tiene dos axiomas:

- *Axioma I*: "Para todo x, no xRx", es decir, en símbolos: $(\forall x) \sim xRx$.

- *Axioma II*: "Para todo x, para todo y, y para todo z, si xRy e yRz, entonces xRz", o bien, en lenguaje simbólico: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(xRy) \wedge (yRz)] \supset xRz$.

Comenzamos por definir en SAFO, para todo a y b, "$a \leqslant b \equiv (aRb \vee a = b)$". Utilizando esta notación, es posible agregar los siguientes axiomas a los axiomas I y II de SAFO. Son éstos:

- *Axioma III*: "Cualesquiera sean x e y, existe un elemento z tal que $x \leqslant z$ e $y \leqslant z$, y además tal que, para todo w que cumpla $x \leqslant w$ e $y \leqslant w$, entonces $z \leqslant w$". En símbolos:
$(\forall x)(\forall y)\{[(\exists z)\ (x \leqslant z \wedge y \leqslant z)] \wedge [(\forall w)\ x \leqslant w \wedge y \leqslant w]\} \supset z \leqslant w$

Se acostumbra llamar al elemento z, en este axioma, el *supremo* de x e y, simbolizado "$x \cup y$".

- *Axioma IV*: "Cualesquiera sean x e y, existe un elemento z tal que $z \leqslant x$ y $z \leqslant y$, y además tal que, para todo w que cumpla $w \leqslant x$ y $w \leqslant y$, entonces $w \leqslant z$". En símbolos:
$(\forall x)(\forall y)\{[\exists z\ (z \leqslant x \wedge z \leqslant y)] \wedge [(\forall w)\ w \leqslant x \wedge w \leqslant x]\} \supset w \leqslant z$

Es costumbre denominar al elemento w, en este axioma, el *ínfimo* de x e y, simbolizado "$x \cap y$". En una palabra, los axiomas III y IV afirman la existencia sin excepción del ínfimo y del supremo de cualquier par de individuos.

Llegados a este punto, si no agregáramos más axiomas, el sistema axiomático resultante admite modelos denominados *reticulados* (en inglés, *lattices*). Esta extensión de SAFO tiene importancia en diversos ámbitos de la matemática. Aun así, todavía es posible proseguir ampliando SAFO añadiendo los siguientes axiomas:

- *Axioma V (distributividad del supremo respecto del ínfimo)*: "$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$"

- *Axioma VI (distributividad del ínfimo respecto del supremo)*: "$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$"

Los reticulados que cumplen también los axiomas V y VI se denominan *reticulados distributivos* y constituyen una familia verdaderamente importante para las necesidades del álgebra moderna. Pero sigamos ampliando SAFO con dos nuevos axiomas:

- *Axioma VII*: "Existe un x tal que, para todo y, $x \leqslant y$". En símbolos: $\exists x[(\forall y)\ x \leqslant y)]$

- *Axioma VIII*: "Existe un x tal que, para todo y, $y \leqslant x$". En símbolos: $\exists x[(\forall y)\ y \leqslant x)]$

En el primer caso (axioma VII) se designa al elemento x con el signo "0" y análogamente, en el segundo (axioma VIII), se designa al elemento y con el signo "1". Es costumbre referirse a ambos elementos, respectivamente, como el elemento *menor* o *mínimo* del reticulado y el *mayor* o *máximo* del reticulado. Agreguemos finalmente un último axioma:

- *Axioma IX*: "Para todo x, existe un y tal que $x \cup y = 1$ y además $x \cap y = 0$". En símbolos: $[(\forall x)\ \exists y\ [(x \cup y = 1) \wedge (x \cap y = 0])$

Los matemáticos utilizan diversas notaciones para simbolizar al elemento y, pero es frecuente designar al y que corresponde a x con la notación x'. Suele denominarse al x' el *complemento* de x. El sistema axiomático que acabamos de obtener, cuyos axiomas son I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII y IX, constituye sin duda una ampliación de SAFO, pero esta vez estamos ante un sistema muy importante y famoso: el álgebra de Boole. Sus interpretaciones más típicas son las siguientes:

(a) La interpretación *lógica*, en la que x, y, z... se corresponden con proposiciones y la interpretación del supremo $x \cup y$ consiste en la afirmación "$x \vee y$" (disyunción incluyente), mientras que el ínfimo $x \cap y$ se interpreta como "$x \wedge y$" (conjunción). En cuanto al complemento de x, x', se lo interpreta como la negación de x, es decir $\sim x$. El cero y el uno corresponden a la idea de falsedad lógica y de verdad lógica. Esta interpretación lógica ha sido vista con razón como una introducción de métodos algorítmicos en lógica, o si se quiere de mé-

todos algebraicos, que como es natural tienen su peculiar "fuerza" para calcular y manipular proposiciones compuestas (del cálculo proposicional). Siendo así, se puede admitir que la introducción del álgebra de Boole configura una victoria pitagórica en el campo de la lógica. Para nuestro problema de fundamentar la matemática ello no implica ayuda alguna, porque "matematizar la lógica" no significa aclarar filosóficamente qué es la matemática. Pero es oportuno señalar que hay una legión de lógicos actuales que gustan sobremanera de abordar sus investigaciones en esta dirección. También destacamos que el álgebra de Boole y algunas de sus interpretaciones aluden a operaciones –lo cual justifica que se hable de "álgebra"– pero ellas no lo son entre números sino entre otro tipo de entidades. Las ejemplificaciones que estamos ofreciendo lo muestran claramente.

(b) Una segunda interpretación del álgebra de Boole, de peculiar importancia para la fundamentación de la matemática, es la interpretación *conjuntística*, imprescindible para el desarrollo de la teoría de conjuntos. En esta interpretación, *x*, *y*, *z*... son *clases o conjuntos* (agrupaciones de entidades que tienen alguna propiedad en común), mientras que $x \cap y$ corresponde a la *intersección* de las clases, o sea a la clase formada por los elementos comunes a *x* e *y*. Análogamente, $x \cup y$ corresponde a la *unión* de esas dos clases, constituida por todos los elementos que están en una u otra de ellas. "0" correspondería a la clase nula, la clase que no tiene elementos. El "1" sería la clase universal constituida por todos los objetos existentes o bien, cuando se la denomina "universo del discurso", aquéllos que estamos tomando en consideración en nuestro estudio.

Señalemos que en un álgebra de Boole se cumplen las siguientes cuasiproposiciones (teoremas):

- $1 \cup 1 = 1$
- $1 \cap 0 = 0$
- $1 \cup 0 = 1$
- $1 \cap 1 = 1$

Estos teoremas del sistema que estamos considerando tienen cierta analogía con las siguientes cuatro igualdades de la aritmética:

- $1 + 1 = 2$
- $1 \times 0 = 0$
- $1 + 0 = 1$
- $1 \times 1 = 1$

Con la excepción del primer caso, la analogía entre las cuasiproposiciones y las igualdades aritméticas es notoria y explica el entusiasmo que despertó la idea de aplicar el álgebra de Boole a la lógica. Hay que hacer notar, sin embargo, que la primera cuasiproposición simplifica notablemente ciertos cálculos en tanto que dificulta el problema de resolver ecuaciones. Pero sin duda el haber descubierto el álgebra de Boole significó un paso clave en la historia de la lógica y particularmente en las investigaciones de la lógica contemporánea.

Bibliografía*

Sobre la fundamentación y la filosofía de la matemática

Nivel intermedio

Benacerraf, Paul and Putnam, Hilary (comps.), *Philosophy of Mathematics*, New York, Prentice Hall, 1964. (Algunos artículos son de nivel elevado.)

Beth, Evert W., *Les fondements logiques des mathématiques*, Paris, Gauthier Villars, 1950.

Beth, Evert W., *The Foundations of Mathematics*, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1959.

Cantor, Georg, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, New York, Dover Publications, 1957.

Carnap, Rudolf, *Fundamentos de lógica y matemáticas*, Madrid, Talleres Ediciones JB, 1975.

Enriques, Federigo, *Los* Elementos *de Euclides y la crítica antigua y moderna*, Madrid, Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas, 1954.

Fraenkel, Abraham A. and Bar-Hillel, Yehoshua, *Foundations of Set Theory*, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1958.

Frege, Gottlob, *The Foundations of Arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concept of number*, Evanston, Illinois, Northwestern University Press, 1980.

Gómez, Ricardo J., *Las teorías científicas*, tomo I, Buenos Aires, Editorial El Coloquio, 1977.

Hao Wang-Naughton, Robert, *Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles*, Paris, Gauthier Villars, 1953.

* Los autores agradecen a la Dra. Gladys Palau por sus sugerencias en materia bibliográfica.

Hilbert, David y Ackermann, Wilhelm, *Elementos de lógica teórica*, Madrid, Tecnos, 1962.

Levi, Beppo, *Leyendo a Euclides*, Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2000.

Nagel, Ernst y Newman, James R., *La prueba de Gödel*, México, UNAM, 1959. (Incluido también en la compilación de Newman que se indica a continuación.)

Newman, James R. (comp.), *Matemática, verdad, realidad*, Barcelona, Grijalbo, 1969.

Newman, James R., artículos diversos sobre temas tratados en este libro, en *SIGMA: El mundo de las matemáticas*, tomo V, México-Buenos Aires-Barcelona, Grijalbo, 1969.

Ross, William D., *Aristóteles*, Buenos Aires, Editorial Sudamericana, 1957.

Russell, Bertrand, *Introducción a la filosofía matemática*, Buenos Aires, Paidós, 1988.

Russell, Bertrand, *The Principles of Mathematics*, London, Allen and Unwin, 1937.

Tymoczko, Thomas (comp.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Princeton University Press, 1998. (Muy recomendable por ofrecer una bibliografía de 25 páginas de obras recientes –colecciones de ensayos, libros y artículos– desde 1980 a 1995; incluye además traducciones y nuevas ediciones de textos clásicos.)

Waismann, Friedrich, *Introduction to Mathematical Thinking. The Formation of Concepts in Modern Mathematics*, New York, Harper Torchbooks, 1959.

Wilder, Raymond L., *Introduction to the Foundations of Mathematics*, New York-London, John Wiley and Sons, 1965.

Nivel elevado

Bernays, Paul and Fraenkel, Abraham, *Axiomatic Set Theory*, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1958.

Chaitin, Gregory, *The Limits of Mathematics*, Springer-Verlag Singapore, 1998.

Church, Alonzo, *Introduction to Mathematical Logic*, New Jersey, Princeton University Press, 1956.

Fraenkel, Abraham, *Abstract Set Theory*, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1953.

Hart, Wilbur D. (comp.), *The Philosophy of Mathematics*, London-New York, Oxford University Press, 1996. (En particular el artículo "Mathematical Truth", de Paul Benacerraf.)

Heyting, Arend, *Intuitionism: an Introduction*, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1956.

Heyting, Arend, *Les fondements des mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la démonstration*, Paris, Gauthier Villars, 1955.

Hilbert, David, *Fundamentos de la geometría*, Madrid, Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas, 1953.

Hintikka, Jaakko, *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, 1996.

Kleene, Stephen Cole, *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1952.

Kneebone, Geoffrey T., *Mathematical Logic and the foundations of mathematics*, London-New York, Van Nostrand, 1963.

Mendelson, Elliot, *Introduction to Mathematical Logic*, Toronto-New York-London, Van Nostrand, 1964.

Russell, Bertrand and Whitehead, Alfred N., *Principia Mathematica, to * 56*, London and New York, Cambridge University Press, 1962. (El asterisco indica hasta qué párrafo se incluye.)

Russell, Bertrand, "La lógica matemática y su fundamentación en la teoría de los tipos", en *Lógica y conocimiento*, Madrid, Taurus Ediciones, 1966.

Sobre la historia de la matemática

Bell, Eric T., *Historia de las matemáticas*, México, Fondo de Cultura Económica, 1949.

Boyer, Carl B., *Historia de la matemática*, Alianza, Madrid, 1986.

Dahan-Dalmedico, Amy et Peiffer, Jeanne, *Une histoire des mathématiques. Routes et dédals*, Paris, Editions du Seuil, 1986.

Heath, Thomas L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* New York, Dover Publications, 3 vols., 1956.

Katz, Victor, *A History of Mathematics: an Introduction*, New York, Addison-Wesley, 1998.

Kline, Morris, *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Madrid, Alianza Editorial, 3 vols., 1992.

Rey Pastor, Julio y Babini, José, *Historia de la matemática,* Barcelona, Gedisa, 2 vols., 1985.

Struik, Dirk J., *A Concise History of Mathematics*, New York, Dover, 1967.

Índice temático y de nombres principales

A posteriori, proposiciones o enunciados, 98, 100, 101
A priori, proposiciones o enunciados, 98, 100, 107; principio, 262
Abscisa de un punto de un plano, 204
Abstracción: 58, 59, 78, 122, 213, 249, 256; definiciones por, 212-216, 218
Absurdo, razonamiento por reducción al, 44, 46, 91, 94, 143, 144, 265, 271
Academia de Platón, 48, 51, 53, 56
Ackermann, W., 249
Afirmación, 26; como sinónimo de *proposición*, 59(n). Véase *Proposición*
Afirmaciones científicas según Aristóteles, 60-63
Aha, álgebra, 32
Ahmés, 32-34, 49, 71-73, 241, 290
Alef ($\aleph$), 235, 296
Alef *sub-cero* ($\aleph_0$), 235
Alejandría, 55, 56, 75, 77
Alejandro Magno, 55, 56, 75
Álgebra de Boole, 182; como ampliación del sistema SAFO, 307, 308; interpretaciones del, 308-310
Álgebra, 22, 115, 182; abstracta, 23, 181, 182
Algoritmo, 23, 41, 112, 123, 137, 162, 181, 190, 218; noción de, 137(n)
Alícuota, parte, 43, 44
Al-Jwarizmi, 112
Al-Tusi, 92
Ambigüedad sistemática, 257
Ampliación de un sistema axiomático, 152, 153, 159, 165, 182
Analíticas, proposiciones, 97, 98, 100
Anamnesis, 51
Antecedente de un condicional, 144, 225, 226
Antinomia, 193, 243, 248; de Burali-Forti, 243; de Eubúlides o del mentiroso, 247(n), 284, 285; de las propiedades; 246, 247; de Nelson y Grelling, 247, 248, 284; de Russell, 245, 246, 252, 259, 264, 271; y su diferencia con *paradoja*, 243
Antinomias, 193, 242-248, 252, 256, 258, 259, 266, 267, 269, 270, 277, 291; intentos de resolución de las, véase *Teoría de los tipos*, *Neointuicionismo* y *Teorías axiomáticas de conjuntos*; semánticas, 247, 284; surgimiento de las, 243; y paradojas, 243-245
Aparato perceptual (Kant), 97
Aplicaciones de la matemática, 21, 22, 24, 120, 125, 151, 155, 163, 182, 241. Véase también *Matemática aplicada*
Apolonio, 75, 76, 82
Apriorismo de Kant, 96-101
Aquiles y la tortuga, 45, 46, 295, 296
Argumento ontológico de la existencia de Dios, 289
Aristóteles, 26, 37, 51, 54-73, 75, 76(n), 78, 79, 90(n), 99, 112-115, 119(n), 120-122, 128, 136, 137, 181, 187(n), 188, 189, 194, 254, 284, 293, 294, 299; caracterización de la ciencia según, 59-72; conocimiento según, 58-59; criterio de verdad de, 64, 65, 119, 121, 125, 128, 162, 187(n); esquemas (formales) de razonamiento según, 113, 114, 188, 293, 294; lógica clásica de, 117, 137, 161, 162, 189, 194; método demostrativo o axiomático clásico de, 59-79, 181; necesidad de la lógica según, 66; obras de, 57, 64, 72; prudencia metodológica de, 67
Aritmética, 22, 112, 117, 211; consistencia de la, 210, 267, 282, 286, 291; incomple-

titud de la, 285, 286; o matemática transfinita, 86(n), 235; sistemas axiomáticos de la, 208, 210, 211, 219, 223-230, 281, 211, 222, 275, 291. Véase *Aritmetización de la matemática* y *Números*
Aritmetización de la matemática, 201-219, 246, 288, 296, 297; de la geometría euclideana a los números reales en el proceso de, 201-210; de los números reales a los naturales en el proceso de, 211-219. Véase *Sintaxis, su aritmetización por Gödel*
Arquímedes, 75, 76, 82; axioma de, 86, 87; obras de, 76
Arreflexibidad de una relación binaria, 142, 143
Arte y matemática, 23, 130
Asimetría de una relación binaria, 142, 143
Asociatividad, 184
Autológica: palabra, 247, 248; propiedad, 246, 247
Autológico, conjunto, 246
Autorreferencia, 284
Axioma, 63; como sinónimo de *postulado*, 80; de reductibilidad, 258; de Arquímedes, 86-87; de compatibilidad u orden total, 152; de elección, 273, 274, 299; de existencia, 271, 272; de inducción matemática, 225-227, 235, 301, véase también *Principio de inducción matemática*; de las paralelas o quinto axioma (o postulado) de Euclides, 79, 86, 87, 89-96, 101, 153, 167, 172; de prolongación de un segmento, 84; del infinito, 258, 273; según Aristóteles, 63, 66-69, 71, 181, 188. Véase también *Axiomas*
Axiomas: de congruencia, 85, 86; de continuidad, 86; de enlace, 84, 171; de la geometría euclideana reformulada por Hilbert, 84-87; de ordenación o de Pasch, 84, 85; de Peano para los números naturales, 156, 223-229, 232, 235-238; de un sistema axiomático, 105, 107, 109-112, 119-121, 123-128, 130, 131, 133, 152-157, 159-163, 165, 176, 181, 186, 282-284, 286, 288, 301; de Zermelo, 269-274; del sistema SAFO, 142-147, 152, 153, 157, 158; del sistema SAFOT, 148, 152, 157, 158; elección de los, 119; evidencia según Aristóteles de los, 68; finitud del número de, 66-67, 119; independencia de los, 148, 152-154, 159, 165, 301; o postulados de la geometría de Euclides o euclideana, 78-80, 153, 171; o postulados de la geometría de Gauss, Bolyai y Lobachevsky, 171, 172; o postulados de la geometría de Riemann, 176. Véase también *Axioma*
Axiomática: clásica, 73. Véase *Aristóteles*; de Peano, 156, 223-230, 235-238, 246, 279, 283, 285, 288(n), 298; de Zermelo, 269-274, 283, 285, 288, 298. Véase *Axiomático, sistema*
Axiomático formal, sistema. Véase *Axiomático, sistema*
Axiomático, sistema: 26, 73, 89, 104-106, 114, 122-136, 181, 186, 189, 205, 229, 239, 257, 282, 284-286, 298-301, 303; ampliación de un, 152, 153, 159, 165; como resultado de una formalización, 164; componentes de un, 115-120; de Peano para los números naturales, 156, 223-230, 235-238, 246, 279, 283, 285, 288(n), 298; de Zermelo, 269-274, 283, 285, 288, 298; elección de un, 120; elemental, 136; *formalismo* como sinónimo de, 211, 274; interpretación de un, 120, 121, 124-132, 136, 139-149, 151, 155, 160, 162-164, 168, 169, 171-173, 176, 179, 186, 187, 189, 239, 257, 282, 294, 298, 299, 301; interpretado, 126, 127, 151, 164, 176; la geometría euclideana como, 172, 173, 180, 206, 219; modelos absolutos de un, 176, 229, 230, 298, 301, 302; modelos de un, 121, 127, 129,

131-133, 144-148, 151, 155-161, 163-165, 171, 177, 181, 185, 186, 229, 257, 291, 294, 295, 301; modelos hipotéticos o hipotético deductivos de un, 175-177, 230, 302; modelos relativos de un, 128, 173, 174, 176, 188, 202, 206, 209, 211, 229, 301, 302; noción de *verdad* en un, 121; noción de, 106; SAFO, ejemplo de un, 135-147, 191; SAFOT, ejemplo de un, 148. Véase también *Axiomáticos, sistemas* y *Método axiomático*

Axiomáticos formales, sistemas. Véase *Axiomáticos, sistemas*

Axiomáticos, sistemas, 104, 112, 123, 124, 129-133, 161, 167, 176, 177, 179, 180-182, 185-187, 205, 239, 241, 274, 275, 277, 293-295, 298-301; caracterización de los, 112-120; de la aritmética, 208, 210, 211, 219, 223-230, 281, 211, 222, 275, 291; de la geometría, 71; de la matemática, 177, 278; de teorías de conjuntos, 269, 275, 276, 291, 292, 199; importancia filosófica de las propiedades de los, 159-161; importancia según Hilbert de los, 274, 275, 280; introducción por Hilbert de los, 106; las geometrías no euclideanas como, 167, 169, 172, 175, 219; propiedades generales y requisitos de los, 151-166; propiedades semánticas de los, 155-159; propiedades sintácticas de los, 151-154; punto de vista filosófico sobre los, 121, 122; similitudes con el ajedrez de los, 104, 109-112, 181, 279; surgimiento histórico de los, 105, 106. Véase también *Axiomático, sistema*

Babini, J., 35

Base de la inducción, 226, 262

Bell, E. T., 24, 89

Beltrami, E., 168

Benacerraf, P., 187

Bessel, F. W., 95

Bicondicional ("≡"), 138, 139, 142, 190

Bien formada, expresión, 118, 119, 122-124, 142, 162, 282. Véase *Cuasiproposiciones*

Blake, W., 51

Bolyai, J., 94-96, 105, 177. Véase *Geometría de Gauss-Bolyai-Lobachevsky*

Bolyai, W., 94,95

Boole, G., 137, 182. Véase *Álgebra de Boole*

Borges, J. L., 23, 202(n)

Bourbaki, Enciclopedia, 185

Brahmagupta, 209

Brouwer, L. E. J., 259, 260, 266, 267, 274, 277. Véase *Neointuicionismo matemático*

Burali-Forti, C., 242-243; antinomia de, 243

Cálculo, 41, 133, 137, 164, 181, 182, 187; como sinónimo de *sistema sintáctico,* 123; diferencial absoluto, 130; infinitesimal, 54, 76, 182

Cantor, G., 53, 86(n), 193-195, 196(n), 199, 232, 234, 235, 242, 243, 246, 248, 260, 261, 269, 270, 274, 277, 295, 296, 298. Véase *Conjuntos, teoría clásica o cantoriana* y *Realismo matemático*

Caracterización de los sistemas axiomáticos formales, 112-120

Cardinales, números, véase *Números cardinales*; transfinitos, 234, 235

Cardinalidad, 234, 296

Carnap, R., 106, 107, 162(n), 221, 249, 254, 281, 297

Categoría: de entidades, 250, 252-255, 258; de los términos de SAFO, 135, 137, 138, 140, 141, 147; de los términos de un sistema axiomático, 109, 111, 115-119, 122-125, 128, 137-141, 162, 189, 193, 195, 224

Categorial, sistema (Kant), 97-99

Categoricidad semántica o por isomorfismo: de un sistema axiomático, 155, 156, 160, 165; de la axiomática de Peano, 229

Cero: como cardinal del conjunto vacío o clase nula, 235, 238; como número asig-

nado al origen de ejes de coordenadas, 202, 203; en el modelo Russell, 235; en la axiomática de Peano, 224-227
Church, A., 249
Chwistek, L., 249
Certidumbre, 65
Ciencia: concepción aristotélica de la, 59-72; concepción tradicional de la, 292, 293; evolución de la, 25, 52-53; historia de la, 39, 40, 52, 53
Ciencias: empíricas, como sinónimo incorrecto de *ciencias fácticas*, 188; formales y fácticas, 71, 187, 188; formales, 71, 187, 240; fácticas, 22, 26, 30, 38, 68, 69(n), 71, 120, 122, 124, 126, 128, 129, 175-177, 179, 186-188, 192, 220, 221, 226, 240, 290, 300, 301, 303, 305
Círculo vicioso, 62; principio del, 249, 255;
Círculo de Viena, 83, 281
Clase: 116, 192, 195, 258, 270; como sinónimo de *conjunto*, 196(n); de equivalencia, 216-221, 234; de los modelos de un sistema axiomático, 229; nula o conjunto vacío, 198, 235, 270-273, 238, 309; o conjunto universal, 309. Véase también *Conjunto* y *Conjuntos*
Clasificación de individuos, 194, 195, 232, 250, 255
Clavius, C., 91
Código de Gödel, 282-284, 286, 287
Codominio de una relación, 199
Complejos, números, véase *Números complejos*
Complemento de un conjunto, 198
Completitud: semántica de un sistema axiomático, 156, 160, 161, 163, 165; sintáctica de un sistema axiomático, 152, 158, 160, 165, 277, 286, 288, 289
Cómputo, 160, 164. Véase también *algoritmo*
Concepción hipotética de las ciencias fácticas, 175, 176, 221, 290, 302
Concepto, 57, 58, 72, 97, 221; construcción de un, 99
Condicional ("⊃"), 138, 139, 142, 144, 190, 225, 226; antecedente de un, 144, 225, 226; consecuente de un, 144, 225, 226
Conectivas proposicionales o lógicas, 138, 139, 142
Congruencia, 85, 86, 118, 168(n)
Conjetura. Véase *Hipótesis*
Conjunción ("∧"), 138, 139, 142, 190
Conjunto: autológico, 246; cardinal de un, 233-235; como sinónimo de *clase*, 196(n); complemento de un, 198; conjunto potencia de un, 198, 272, 273; de conjuntos, 198, 234, 244, 264, 273; de estructuras, 183; definición de Cantor de un, 195, 196, 249; elementos de un, 197; heterológico, 246; inductivo de cardinales, 235-237, 258; infinito, 234, 235, 261, 262, 273, 295, 296; no predicativo, 249; pertenencia ("∈") de un elemento a un, 196, 197; predicativo, 249; subconjunto (parte) de un, 197, 198, 271, 272; unitario o singular, 196, 238, 272, 273; universal, 309; vacío o clase nula, 198, 235, 270-273, 238, 309. Véase también *Conjuntos*
Conjuntos: 53, 116, 192, 193, 158, 192-194, 216, 232, 233, 239-241, 244, 246, 258-261, 264, 270, 272, 276; como habitantes del segundo mundo platónico, 53, 276; complementación de, 198; coordinables, 233; correspondencia biunívoca entre, 199; disyuntos o disjuntos, 198; e individuos, 194, 195, 197; familia de, 273; identidad de, 197, 198; inclusión de, 197, 198, 272; intersección de, 196, 235, 236, 309; operaciones entre, 196, 197; relación biunívoca entre, 197-199; teoría axiomática de Zermelo de, 269-274, 283, 285, 288, 298; teoría clásica o cantoriana de, 26, 158(n), 192-199, 212, 232-234, 241, 242, 246, 248, 267, 269; teorías axiomáticas de, 269, 276, 292, 299; unión de, 196, 273, 309. Véase también *Conjunto*

Conocimiento: 27, 38, 40, 41, 56-59, 71, 97-100, 130-133, 147, 160, 182, 226, 250, 251, 253, 276; criterio fundamentativo del, 71; matemático, 27, 29, 97, 130, 131-133, 241, 242, 289, 290, 299-301, sintético *a priori*, 100, 101; y metaconocimiento, 132, 133, 300
Consecuente de un condicional, 144, 225, 226
Conservación de la verdad, 66, 69, 125, 140, 157, 161
Consistencia o coherencia: absoluta, 174, 175, 177, 291, 298; de la aritmética, 210, 267, 282, 286, 287, 291; de la geometría de Gauss-Bolyai-Lobachevsky, 167-175, de la geometría euclideana, 173-175, 201, 206, 209, 210, 219; de la lógica, 240-242, 246, 291, 292; de la matemática, 230, 241, 246, 277, 280, 289, 291; de las geometrías no euclideanas, 167, 168, 174, 177, 201, 209, 219; de las teorías axiomáticas de conjuntos, 274, 291, 292, 298; de los sistemas axiomáticos de la aritmética, 201, 206, 210, 219, 228-230, 287, 211, 212, 246; de un sistema axiomático, 132, 151, 152, 156, 157, 159, 165, 168, 176, 282, 286-289; irresolubilidad del problema de la, 286-289; pruebas de, 173, 174, 177; relativa, 157(n), 173-175, 177, 291, 301; trasladada sucesivamente de la de las geometrías no euclideanas a la de la lógica, 240, 241; y satisfactibilidad de un sistema axiomático, 156, 157
Constantes individuales o nombres de individuos, 136, 138, 140-142, 144, 191, 224
Construcción de los números según el neointuicionismo, 260-265, 275, 277
Construcciones en los *Elementos*, 80, 81
Constructivismo: en las ciencias fácticas, 220, 221; matemático, 219-222, proyección en la filosofía del, 296, 297; y eliminación de entidades metafísicas, 219-222
Contenido semántico, 59, 105, 106, 109, 120, 127, 172, 239, 240
Contextual, definición, 227, 228
Contingencia: 61, 66, 191; y necesidad, 61, 66
Continuidad, axiomas de, 86
Contradicción, 44, 91, 93, 101, 102, 132, 160, 167, 168, 240-244, 246-248, 264, 265, 271, 274, 285, 288, 291; como sinónimo de *falsedad lógica*, 191; principio de no, 190, 193, 266. Véase también *Antinomia*
Contraejemplo, 68
Convencionalismo de Poincaré, 177-180
Conversa de una relación binaria, 141
Coordinabilidad: de conjuntos, 233, 234; relación de, 234
Coordenadas, 204; ejes de, 203; origen de, 203
Correspondencia biunívoca: entre conjuntos o clases, 199, 233; 236, 237; entre puntos de una recta y números reales, 202, 203; entre puntos del plano y pares ordenados de números reales, 204, 205
Cortaduras de Dedekind, 218, 221, 297
Criterio: correspondentista, semántico o de adecuación de la verdad (Aristóteles), 64, 65, 119, 121, 125, 128, 162, 187(n); fundamentativo del conocimiento, 71
Cuadrilátero de Saccheri, 91-94
Cualidades, 48
Cuantificador, 138; existencial ("∃"), 138, 139, 191, 192; universal ("∀"), 138, 139, 143, 145, 148, 191, 192
Cuantificadores, 138, 142, 143, 145, 191, 192, 265
Cuasiproposiciones, 104, 109, 111, 117-120, 123-125, 127-133, 138, 139, 142, 145, 152-154, 156, 157, 159-161, 163, 165,

176, 206, 224, 225, 257, 274, 282, 285, 286, 289, 293, 299-303; abiertas, 142
Curry, H, B., 162
Da Costa, N. C. A., 161
D'Alembert, J. L., 94
De Morgan, A., 137
Decidibilidad: semántica de un sistema axiomático, 159, 161, 165; sintáctica de un sistema axiomático, 154, 160, 165, 286-288, 289
Dedekind, R., 112, 212; cortaduras de, 218, 221, 297
Deducción, 38, 63, 66, 69, 70, 73, 104, 109, 110, 112, 113, 117, 120, 123, 124, 139, 140, 143, 144, 161-163, 188, 239, 274, 282; noción de, 66. Véase *Razonamiento*
Definición, 64, 69, 70, 162; contextual o implícita, 227, 228; en los sistemas axiomáticos, 117, 118; nominal, 69; por abstracción, 212-216, 218; por inducción, 262; real, 69; según Aristóteles, 68-70; según Euclides, 78
Demostración, 40, 41, 63, 70, 71, 90, 120, 131, 144, 148, 164, 167, 181, 188, 282-284, 288; como deducción a partir de axiomas, 63, 70; por el absurdo, véase *Absurdo*; por inducción, 262
Denotación, 104, 119, 125, 164; abierta, 104
Demostrabilidad, como *deducibilidad* a partir de axiomas, 285, 289
Demostrativo o axiomático clásico, método, 59-75, 181; limitaciones del, 72, 73.
Densidad de la recta, 80
Descartes, R., 201, 202, 205, 209, 210, 219. Véase *Geometría analítica*
Designación, 105, 109, 127, 130, 140, 241, 303
Dewey, J., 231
Dieudonné, J., 83
Dirección de una recta, 212, 213, 215, 216
Disciplina científica (Aristóteles), 60, 68, 71
Discurso, 103, 162, 164; lógico, 239; matemático y metamatemático, 278; ordinario, 164; semántico, 164; semiformal, 303
Disolución de ciertos problemas filosóficos, 254
Distancia, 116, 168, 169, 172, 178-180,
Disyunción: excluyente ("∇"), 138, 139, 148, 190; incluyente ("$\vee$"), 138, 139, 190
Doble negación, principio de, 265, 266
Dominio de una relación, 199
Ecuación de primer grado, 204-206
Einstein, A., 24, 39, 105, 106, 130, 231, 260, 281, 304, 305; geometría y realidad según, 106; relatividad general de, 24, 105, 130
Elección, axioma de, 173, 274, 299
Elemento: de un conjunto, 197; de una estructura, 183; unidad o neutro, 185; inverso o recíproco, 185
Elementos (Euclides), véase *Euclides*; platonismo y aristotelismo en los, 77, 78
Elucidación, 221, 222, 234(n),
Empirismo, 49, 100, 101, 303; lógico, 83, 100, 106, 219, 297, 254, 281; primitivo en matemática, 33, 34, 38, 71
Enriques, F., 45
Enteros, números, véase *Números enteros*
Entidades, 24, 26, 29, 60, 69, 105, 119, 127, 136, 172, 250, 255, 260, 303; formales, pitagóricas o platónicas, 48, 49, 59, 114, 173, 230; lógicas, 239, 252, 253; matemáticas, 41, 48, 220, 221, 227, 239, 265, 278, *véase Objetos matemáticos*; metafísicas: 220, 221, 230; observables, 37, 188; reales, 111; simples o básicas, 194, 195, 297; teóricas o no observables, 37, 188, 221
Enunciado, 59, 67, 68; como sinónimo de *proposición*, 59(n). Véase *Proposición*
Epiménides, 284(n)
Episteme, 58
Epistemología, 25, 29, 49, 98, 132, 180, 187, 250, 258, 298

Equidescomposición, relación de, 214, 215
Equivalencia, 213, 216; clase de, 216-221, 234; relación de, 213-217
Esencia, 49, 221, 222
Espacio: extenso, 43; físico o real, 43, 105, 111, 121, 173, 175, 179, 180, 208; geométrico, 57; según Kant, 97
Esquemas formales (Aristóteles), 113, 114, 188, 293, 294
Estructura: de grupo, 184, 185; formal, 183-185; noción de, 22, 23, 183; tipo de, 183
Estructuras, 160, 164, 179, 185; matemáticas, 183, 185-187; numéricas, 22; reales, 22
Etapa inductiva, 226
Eubúlides, antinomia de, 247(n), 284, 285
Euclides, 26, 54, 68, 73, 75, 76, 80-82, 85, 87, 89-91, 93, 102, 167, 172, 179(n), 192, 208, 223; *Elementos* de, 26, 54, 73, 76-82, 87, 89, 90, 93, 167, 172, 223; quinto axioma o postulado de las paralelas de, 79, 86, 87, 89-96, 101, 153, 167, 172
Euclides-Hilbert, geometría de, 83-87, 192, 206
Eudoxo, 53, 54, 77, 79
Evidencia, 59, 63, 66, 68, 71-73, 111, 188, 262
Evidentes, principios, 63, 66
Excluido, principio de tercero, 115, 161, 190, 193, 245, 247, 259, 265, 266, 270
Existencia: axioma de, 271, 272; principio de, 270, 271; y subsistencia según Meinong, 298, 299
Experiencia, 33, 38, 45, 51, 52, 72, 97-100, 102, 106, 107, 176, 188, 290
Expresión decimal: de los números racionales, 262; de los números reales, 263
Expresiones, 117, 122, 123, 138, 142, 145, 190, 240, 283; bien formadas, 118, 119, 122-124, 142, 162, 282, véase *Cuasiproposiciones*
Extensión: de una propiedad, 194, 195, 233, 236, 244, 270-272; de un punto según Pitágoras, 43, 45; *versus* conjunto, según Cantor, 194-196
Fácticos, términos, 302, 303
Factores primos, 283
Falacia de división, 47
Falsedad lógica o contradicción, 190
Familia de conjuntos, 273
Farrington, B., 56
Fatone, V., 132
Fermat, P., 201, 202, 205, 209, 210, 219; último teorema de, 202(n), 300. Véase *Geometría analítica*
Figuras: según Aristóteles, 59, 60; formas de, 101, 212, 214
Filosofía: de la matemática, 27, 189, 259, 289, 291, 306; y matemática, 293-305
Finitud del número de axiomas, 66, 67, 119
Forma: correcta de razonamiento, 66, 70, 103, 104, 110, 113, 114, 126, 140, 161, 181, 239; de proposición, 191, 192; de razonamiento, 70, 113, 114, 188; de una figura geométrica, 101, 212, 214
Formal: acepciones de la palabra, 112-115; lógica, 188; sistema axiomático, véase *Sistema axiomático*
Formalismo: como posición filosófica, 64, 239, 241, 272, 274, 277, 278, 289, 305; como sinónimo de *sistema axiomático formal*, 211, 274
Formalización, 114, 129, 163, 164, 301
Formalizaciones, utilidad de las, 164
Formas: correctas de razonamiento, 66, 70, 103, 104, 110, 113, 114, 126, 140, 161, 181, 239; de proposiciones, 191, 192; de razonamiento, 70, 113, 114, 188; o ideas platónicas, 49, 57, 114
Fórmula, 122, 123, 162; como sinónimo de *cuasiproposición*, 118(n)
Fourier, J., 23
Fraccionarios, números, véase *Números fraccionarios*

Frege, G., 137, 193, 230, 233, 238-240, 243, 276, 277, 291; Frege-Russell, véase *Modelo Russell*
Fuerzas universales, 180
Función, 116-118, 162
Fundamentación: de la matemática, 25-27, 137, 187, 258, 259, 262, 266, 274-276, 281, 288, 289, 291, 298; hipotética del conocimiento matemático, 289, 290
Galileo, 21, 67, 73, 75, 89, 120, 129; sobre el libro de la naturaleza, 21; sobre los conjuntos infinitos, 67, 295, 296
Galois, E., 184; estructura de grupo de, 184, 185
Gauss, Bolyai y Lobachevsky, geometría no euclideana de, véase *Geometría de Gauss-Bolyai-Lobachevsky*
Gauss, C. F., 82, 94-96, 102, 105, 177, 212, 283; véase *Geometría de Gauss-Bolyai-Lobachevsky*
Gémino, 90
Generalización, 136, 225
Gentzen, G., 267(n), 288(n)
Geometría: analítica, 76, 201-206, 210, 219; de Euclides-Hilbert, 83-87, 132, 192; de Gauss-Bolyai-Lobachevsky (hiperbólica), 96, 101-103, 167-174, 178, 179; de Riemann (elíptica), 96(n), 102, 130, 175; euclideana o euclídea (parabólica), 24, 26, 76-82, 96, 101-103, 105, 106, 111, 112, 117, 118, 121, 125, 146, 161, 167-170, 172-177, 180, 181, 184, 202, 206, 209, 239; matemática y geometría física, 106; no euclideana, noción de, 93. Véase *Geometrías no euclideanas*
Geometrías no euclideanas, 24, 89-107, 111, 112, 153, 160, 161, 167, 168, 174, 176, 177, 180, 209, 239, 241, 246; características de las, 101-103; consistencia de las, véase *Consistencia*; problemas filosóficos planteados por las, 103-107; surgimiento histórico en el siglo XIX de las, 89-96
Glivenko, V., 267
Gödel, K., 53, 261, 267, 274-278, 280-282, 285-287, 289, 291; aritmetización de la sintaxis por, 282-283, 286-289; código de, 282-284, 286, 287; consecuencias filosóficas de los metateoremas de, 289, 290; metateoremas de, 277, 281-290, 301, 305; números gödelianos o de, 282-284; primer metateorema de, 281-288; segundo metateorema de, 286-289. Véase *Realismo matemático* y *Limitaciones de la matemática*
Gödelianos, números, véase *Números gödelianos*
Grupo: 168, 184; conmutativo o abeliano, 185; estructura de, 184, 185
Hammurabi, 31
Haz de paralelas, 216
Heath, T. L., 78
Hechos, 22(n), 26, 119, 187, 188
Heidegger, M., 254
Heródoto, 32, 33
Heterológica, propiedad, 246, 247, 252
Heterológicas, palabras, 247-248
Heterológico, conjunto, 246
Heyting, A., 260, 267, 277, véase *Neointuicionismo matemático*
Hilbert, D., 81-87, 91, 105, 106, 112, 116, 118, 157, 167, 168, 171, 172, 193, 194, 223, 228, 239, 248, 249, 260, 274-278, 280, 289; axiomas geométricos de, 84-87; introducción de los sistemas axiomáticos por, 106; posibilidad de probar la consistencia de la matemática según, 276, 280, 289; posibilidad de una reconstrucción completa de la matemática según, 275, 276, 280, 289; reformulación de la geometría euclideana por, 83-87, 132. Véase también *Formalismo*, *Geometría de Euclides-Hilbert* y *Sistemas axiomáticos*
Hipótesis: corroborada, 175, 176; de un sistema hipotético deductivo, 125, 126,

147, 175, 176, 303; derivadas, 175; en las ciencias fácticas, 26, 69, 125, 147, 303; noción de, 26, 125, 126, 290; refutada, 175; según Aristóteles, 68, 69
Hipotético deductivo, método, 66, 68, 305
Hipotético deductivo, sistema, 71, 125, 176, 177, 188, 302, 303;
Hipotético, modelo, 176, 177, 302
Horror al infinito de los griegos, 67, 78, 79
Husserl, E., 53, 103, 121; ontologías regionales de, 103, 121
Huxley, A., 51
Ideas o formas platónicas, 49, 57, 114
Identidad: relación de ("="), 136, 138, 213; de conjuntos, 198, 224, 271
Imaginarios, números, véase *Números imaginarios*
Implicación. Véase *Condicional*
Inclusión: de un conjunto en otro ("⊆"), 197, 272; propia ("⊂"), 158(n), 197
Incompletitud, 285, 286
Inconmensurabilidad de segmentos, 43-45, 209
Indemostrabilidad, 287, 288
Independencia: de los axiomas de un sistema axiomático, 148, 152-154, 159, 165, 301; de una cuasiproposición con respecto a los axiomas de un sistema axiomático, 153, 157, 158; del quinto postulado de Euclides, 93
Individuo, 116-118, 125, 136, 138, 139, 143, 149, 155, 191, 194, 195, 197, 224, 250-255, 258, 270
Individuos, nombres de, véase *Constantes individuales*
Inducción: 34, 37, 38; en Aristóteles, 59; en las ciencias fácticas, 226. Véase *Axioma de inducción matemática*
Ínfimo, 307
Infinito: actual, 67, 79; axioma del, 258, 273; horror al, 67, 78, 79; potencial, 67, 79; regreso al, 61-63
Infinitos, conjuntos, 234, 235, 261, 262, 273, 295, 296
Infinitos, números, véase *Números infinitos*
Informática, 123, 162, 182
Intelección, 40, 276
Intensión de una propiedad, 194
Interpretación, 104, 106; de un sistema axiomático sobre otro, 127, 145(n), 155, 158, 171, 176; de un sistema axiomático, 120, 121, 124, 125-132, 136, 139-149, 151, 155, 160, 162-164, 168, 169, 171-173, 176, 179, 186, 187, 189, 239, 257, 282, 294, 298, 299, 301; y modelo: acepción semántica, 124-127; y modelo: acepción sintáctica, 127, 128;
Intersección de conjuntos ("∩"), 196, 235, 236, 309
Intuición, 40, 41, 52, 70, 72, 97-99, 132, 269, 276
Intuicionismo: dualista de Platón, 40, 53, 72. Véase *Neointuicionismo matemático*
Intuicionistas, filósofos, 40
Investigación en matemática, 286, 300, 301, 305, 306
Irracionales, números, véase *Números irracionales*; expresión decimal infinita de los, 263, 263
Isomorfismo, 41-43, 48, 49, 155, 156, 160, 161, 208, 229
Jacobi, C. G., 23
Jeans, J., 305
Kant, I., 40, 47, 72, 96, 97, 105, 106, 122, 260, 262; apriorismo de, 96-101; enunciados sintéticos *a priori* de, 98-100
Khayyam, O., 92
Kleene, S. C., 267
Klein, F., 42, 102, 168; modelo de la geometría de Gauss-Bolyai-Lobachevsky de, 168-173, 178-180, 209
Koestler, A., 39, 305
Kronecker, L., 194, 219, 220, 229, 260; creación divina de los números natura-

les según, 219, 229; crítica a la teoría de Cantor por parte de, 194, 260
Lagrange, J. L., 73, 94
Lambert, J., 94
Laplace, P. S. de, 73
Leibniz, G. W., 54, 76
Lenguaje: capacidad de autorreferenciarse del, 284; en Aristóteles, 60, 64; matemático, 303; objeto, 278, 279; ordinario, 139, 192, 197; y metalenguaje, 132, 278, 279
Lenguajes matemático y fáctico, 303-305; posiciones acerca de las relaciones entre los, 304, 305
Leonardo da Vinci, 54(n)
Levi, B., 77, 80
Leyes, 65; científicas, 69; formales, 65; generales (Aristóteles), 65, 72
Liceo de Aristóteles, 56
Lie, M. S., 168
Limitaciones de la matemática, 281-290
Límite de una sucesión infinita, 46, 296
Lindenbaum, A., 286
Lingüística, 131, 132, 278
Lobachevsky, N. I., 96, 103, 105, 177. Véase *Geometría de Gauss-Bolyai-Lobachevsky*
Locuciones sin sentido, 256
Lógica, 38, 66, 69, 103, 105, 112, 113, 115, 137, 159, 181, 189, 223, 233, 238-243, 258, 261, 265, 282; aplicada, 124, 239; clásica o tradicional, 117, 137, 161, 162, 189; consistencia de la, 240-242, 246, 291, 292; de clases o conjuntos, 116, véase *Teoría de conjuntos*; debilitación por el neointuicionismo de la, 266; elemental de predicados con identidad, 136, 137, 224; elemental de predicados, 191, 192, 267, 270, 279, 282, 291; elemental, 115, 269; formal, 120, 123, 164, 188; matemática, 137, 182; necesidad en el pensamiento aristotélico de la, 66; neointuicionista, 265, 267; proposicional, 138, 190-192, 267, 269, 291; simbólica, 137; subyacente o presupuesta de un sistema axiomático, 115-117, 119, 123, 136-140, 161, 189-193, 197, 223, 224, 229, 279, 282; superior de predicados, 192, 193, 195, 223; y *lógicas*, 115; y sistemas sintácticos, 161, 162
Lógicas superiores, 116, 269, 274, 279, 291
Logicismo, 124, 238-241, 249, 258, 261, 275-277, 291, 305; dos versiones del, 238-240
Lógicos: principios, 115, 189, 190, 193, 259, 264, 266, 269, 277; procedimientos, 37, 38; símbolos, 136-138, 182; términos, 118, 136-138, 142, 191
Logística, 137
Lukasiewicz, J., 259(n)
Matemática, 21-25; alejandrina, 75; aplicada, 82, 106, 122, 124, 128, 130-133, 155, 159, 181, 182, 188, 266, véase también *Aplicaciones de la matemática*; aritmetización de la, 201-219, 246, 288, 296, 297; axiomática como lógica aplicada, 124; como *teoría de lo posible*, 121; consistencia de la, 230, 241, 246, 277, 280, 289, 291; egipcia, 31-34; filosofía de la, 27, 189, 259, 289, 291, 306; fundamentación de la, 25-27, 137, 187, 258, 259, 262, 266, 274-276, 281, 288, 289, 291, 298; historia de la, 30, 82, 83; investigación en, 286, 300, 301, 305, 306; limitaciones de la, 281-290; mesopotámica, 30, 31; motivaciones estéticas para el estudio de la, 23, 130; o aritmética transfinita, 86(n), 235; orígenes de la, 30, 33; posiciones filosóficas acerca de la, 29, 276-277, 305, véase *Formalismo*, *Logicismo*, *Neointuicionismo* y *Realismo matemático*; preguntas fundamentales acerca de la, 29; problemas clásicos de la, 54; pura o formal, 82, 106, 123, 125, 129, 130, 133, 181, 188, 222, 239, 240, 241, 257, 266, 274, 293, 299, 305; tradi-

ciones en la historia de la, 181-187; y ciencia griega, 35, 36, véase *Tales*, *Pitágoras*, *Platón* y *Aristóteles*; y filosofía, 293-305, véase también *Filosofía de la matemática*; y *matemáticas*, 21(n); y metamatemática, 132, 278, 279; y realidad, 21-24, 29, 34, 38, 99, 121, 131, 208, 231, 241, 242, 261, 301, 302
Mecánica, 71, 114, 186
Medición, 41, 43, 44, 105, 182; unidad de, 43, 44
Medida, 43, 44
Meinong, A., 298; existencia y subsistencia según, 298, 299
Mesmer, F. A., 25
Metaconocimiento, 132, 133, 300
Metafísica, 57, 221, 254, 297
Metafísicas: constructivismo matemático y eliminación de entidades, 219-222, 296, 297; creencias o suposiciones, 220, 230, 276, 277, 297, 298, 305; entidades, 220, 221, 230
Metalenguaje, 132, 275(n), 278, 279, 282, 286, 287; y lenguaje objeto, 278, 279
Metamatemática, 132, 278, 279
Metamatemático, discurso, 278,
Metateoremas, 132, 278, 282; de Gödel, véase *Gödel*
Metateorías, 132
Método: axiomático formal, véase *método axiomático*; de exhaución, 54; hipotético deductivo, 66, 186, 290; modelístico, 41
Método axiomático, 66, 73, 104, 124, 181, 186, 227, 228, 275, 276, 298; clásico (demostrativo aristotélico), 59-75, 181
Metodología, 29, 50, 51, 73, 104, 181, 242; axiomática, véase *Método axiomático*; hipotético deductiva, véase *Método hipotético deductivo*
Modelo: de Klein, 168-174, 185, 188; de un sistema axiomático sobre otro, véase *Interpretación de un sistema axiomático sobre otro*; matemático en Pitágoras, 42; noción de, 127; Russell o lógico-conjuntista de la axiomática de Peano, 227-230, 239, 240, 258. Véase también *Modelos*
Modelos: absolutos, 176, 229, 230, 298, 301, 302; de la aritmética, 211, 239; de la axiomática de Peano, 227-230; de la geometría de Gauss, Bolyai y Lobachevsky, véase *Modelo de Klein*; de la geometría euclideana, 206, véase *Geometría analítica*; de las geometrías no euclideanas, 168-177; de un sistema axiomático, 121, 127, 129, 131-133, 144-148, 151, 155-161, 163-165, 171, 177, 181, 185, 186, 229, 257, 291, 294, 295, 301; en las ciencias fácticas, 128, 129; hipotéticos o hipotético deductivos, 175-177, 230, 302; relativos, 128, 173, 174, 176, 188, 202, 206, 209, 211, 229, 301, 302
Modus ponens, 144, 287
Morfología, 117, 118, 128, 138, 142, 189
Naturales, números, véase *Números naturales*
Necesidad, 61, 66, 97, 99, 140; y contingencia, 61, 66
Negación ("~"), 138, 139, 142, 157, 190; principio de doble, 265, 266
Negativos, números, véase *Números negativos*
Nelson y Grelling, antinomia de, 247, 248, 284
Neointuicionismo matemático, 161, 259-267, 272-277, 279, 303-305; dificultades del, 266, 267
Neointuicionista, lógica, 265, 267
Newton I., 54, 73, 76, 89, 132
Nivel, 251, 252, 255, 256, 258
Nociones comunes (Euclides), 78, 80, 92
Nombres de individuos, véase *Constantes individuales*
Noúmenos (Kant), 97
Numeración de Gödel, 282-284

Números: cardinales de conjuntos, 233-235, 261, 262, 272, 273; complejos, 208; en la concepción habitual de la matemática, 22-24; en la historia de la matemática, 207, 208; en la tradición computacional, 181, 182; enteros, 183, 185, 207, 208, 210-212, 216-219, 221, 234, 263; fraccionarios, 207; gödelianos, 282-284; imaginarios, 208; importancia en el pensamiento de Pitágoras de los, 39, 40, 208, 209; infinitos, 194; irracionales, 45(n), 194, 202, 207-210, 218, 262-264; naturales, 67, 145, 156, 167, 183, 201, 207, 208, 210-212, 216-220, 223-227, 229, 230, 234-236, 246, 256, 260-262, 272-275, 282, 283, véase *Axiomática de Peano* y *Modelo Russell*; negativos, 206-208, 217; primos, 282, 283; racionales, 183, 202, 207, 208, 210-212, 218, 219, 234, 262, 263; reales, 117, 183, 202, 204-212, 218, 219, 262, 264, 266; transfinitos, 86(n), 234, 235. Véase *Aritmética*
Objetos: abstractos, 72; concretos o empíricos, 33, 37, 58; físicos, 71, 97; matemáticos, 29, 33, 34, 39, 40, 48, 64, 72, 97, 103, 114, 131, 195, 260, 261, 277; no empíricos, 39, 40; platónicos o formales, 48, 261, 187; reales, 60, 97
Observables, entidades, 37, 188;
Ockham, navaja de, 154
Ontología, 29(n), 40, 49, 64, 250
Operación, 116, 183, 184, 262: dos significados de, 224(n); asociativa, 184
Operadores lógicos, 117
Óptica geométrica, 125, 175
Orden, 250-258
Ordenada de un punto de un plano, 204
Oriciclos, 174
Orisferas, 174
Palabras: autológicas, 247-248; heterológicas, 247-248
Par: no ordenado de números, 204, 238, 272; ordenado de números, 204-206, 209, 216, 217
Paradoja, 243-245; de los catálogos, 244; del barbero, 244; y su diferencia con *antinomia*, 243
Paralelas: axioma o postulado euclideano de las, 79, 86, 87, 89-96, 101, 153, 167, 172; distintas formulaciones del axioma de las, 90, 91; rectas, 87, 102, 215; haz de, 216
Paralelismo, como relación entre rectas, 212, 215, 216
Parte: alícuota, 43, 44; o subconjunto de un conjunto, 197, 198, 271, 272
Participación, 49
Pasch, M., 81, 87, 112; axiomas de, 84, 85
Peano, G., 81, 87, 112, 137, 221-224, 227, 235, 242, 262, 274, 288. Véase *Axiomática de Peano*
Período, 263
Peripatéticos, 56
Pertenencia ("∈"), relación de, 196, 197
Petición de principio, 62, 63
Pitágoras, 37(n), 39-47, 48, 72, 182, 184, 208, 209; concepción modelística de, 42, 43; concepciones matemáticas de, 39-43; influencia sobre Platón de, 48; intuicionismo dualista de, 40; teorema de, 31, 32, 42, 44; y la inconmensurabilidad de segmentos, 43-46, 209
Plano. Véase *Geometría euclideana* y *Geometría no euclideana*
Platón, 48-54, 56, 57, 72, 73, 77, 220, 230, 276; actitud hacia la matemática de, 48, 53; influencia de, 53, 54; los dos mundos de, 48, 49; objeciones a la epistemología de, 52, 53; y el realismo matemático, 297-299
Platónicas, formas o ideas, 49, 57, 114
Playfair, J., 91
Poincaré, H., 173, 177-180, 249, 260, 262; convencionalismo de, 177-180; modelo de, 173

Poliedros, 184
Posidonio, 90
Positivismo (o empirismo) lógico, 83, 100, 106, 219, 297, 254, 281
Postulado: como sinónimo de *axioma*, 80; euclideano de las paralelas, 79, 86, 87, 89-96, 101, 153, 167, 172; según Aristóteles, 68; según Euclides, 78, 79. Véase *Axioma*
Pragmática, 50
Predicados, 138, 139, 141, 191, 224, 245, 250, 251, 254, 269, 284; de propiedad, 138; relacionales, 138, 141; lógica elemental de, 136, 137, 191, 192, 224, 267, 270, 279, 282, 291; lógica superior de, 192, 193, 195, 223
Preguntas fundamentales acerca de la matemática, 29; respuestas de Ahmés a las, 33, 34; respuestas de Aristóteles a las, 72; respuestas de Kant a las, 98, 99; respuestas de Pitágoras a las, 40, 41; respuestas de Platón a las, 49; respuestas de Tales a las, 37, 38; respuestas desde el logicismo a las, 241, 242; respuestas desde la matemática aplicada a las, 131; respuestas desde la matemática pura o formal a las, 130, 131, 241
Presburger, M., 285
Primos, números, véase *Números primos*
Principio: de existencia, 270, 271; de identidad, 190; de inducción matemática o completa, 167, 262; de no contradicción, 157, 161, 190, 193, 245, 266, 272, 288; de tercero excluido, 115, 161, 190, 193, 245, 247, 259, 265, 266, 270; del círculo vicioso, 249, 255; de doble negación, 265, 266
Principios: lógicos tradicionales, 115, 189, 190, 193, 259, 264, 266, 269, 277; de la ciencia según Aristóteles, 63, 68, 181
Problemas clásicos de la matemática, 54
Problemas filosóficos, disolución de ciertos, 254
Proclo, 53,90, 91
Progresiones (Russell), 229
Propiedad: autológica, 246, 247; de propiedades, 116, 137, 193, 223, 251; heterológica, 246, 247, 252; predicados de, 138
Propiedades, 116, 118, 136, 138, 144, 192-195, 198, 223-229, 233, 237, 242, 246, 247, 250-256, 258, 262, 270, 278, 283, 284, 289; sintácticas y semánticas de los sistemas axiomáticos, 151-159, 165; antinomia de las, 246, 247
Proposición, 59, 69, 80, 104, 109, 111, 116, 119, 120, 121, 125, 127, 129, 131, 137-140, 145-147, 151, 157-161, 163, 167, 171, 172, 177, 189-191, 250-253, 257, 264, 265, 285-287, 294; *a posteriori*, 98, 100, 101; *a priori*, 98, 100, 107; analítica, 97, 98, 100; como sinónimo de *afirmación* o *enunciado*, 59(n); contenido semántico de una, 59(n), 104, 109, 111, 119, 121, 125, 129, 145; esquema de, 113, 114, 188, 293, 294; general, 65; indeterminada, 115; metamatemática, 278; singular, 65; sintética, 97, 98, 100, 101. Véase *Proposiciones*
Proposiciones: formas de, 191, 192; matemáticas, 29, 30; verdaderas o falsas, 61-63. Véase *Proposición*
Prueba de consistencia relativa, 173
Puntos: pitagóricos extensos, 43-46, 208, 209; sin extensión, 45. Véase *Geometría euclideana, Geometrías no euclideanas* y *Geometría analítica*
Quine, W., 233, 274
Racionales, números, véase *Números racionales*; expresión decimal infinita de los, 262, 263
Ramsey, F. P., 249
Razonamiento, 61, 66, 67, 69, 70, 104, 124, 139, 144, 191, 240, 241, 287; forma de, 70, 113, 114, 188; forma correcta de, 66, 70, 103, 104, 110, 113, 114, 126, 140, 161, 181, 239

Reales, números, véase *Números reales*
Realismo, 60, 65, 219, 250; matemático, 114, 261, 274, 276, 277, 298, 305
Recta: densidad de la, 80; dirección de una, 212, 213, 215, 216; prologación de una, 79; sentidos de una, 212. Véase *Geometría euclideana, Geometrías no euclideanas* y *Geometría analítica*
Reducción: al absurdo, 44, 46, 91, 94, 143, 144, 265, 271; de la matemática a la lógica, véase *Modelo Russell*; por etapas de formalismos de la matemática, véase *Aritmetización de la matemática*
Reductibilidad, axioma de, 258
Referencia, 50, 64, 122, 124, 130
Reflexividad: de una relación binaria, 183, 212, 233; de una relación de equivalencia, 213-215, 233
Reglas: de deducción, 117, 123-125, 139, 140, 161; de definición, 117, 118, 140, 189; de formación, 123; de producción o de transformación, 123, 124, 161, 162; de razonamiento correcto, véase *Forma correcta de razonamiento*; gramaticales, 104, 109; morfológicas, 117-119, 142
Regreso al infinito, 61-63
Relación, 48, 118, 137, 139, 140, 155, 193, 250-254, 256; arreflexiva, 142, 143; asimétrica, 142, 143; biunívoca entre conjuntos, 197-199; codominio de una, 199; conversa de una, 141; de coordinabilidad, 234; de equidescomposición, 214, 215; de equivalencia, 213-217; de identidad, 136, 138, 213; de inclusión, 197, 272; de paralelismo, 212, 215, 216; de pertenencia, 196, 197; de semejanza, 213-214; diádica o binaria, 116, 117, 139, 141, 143, 191; dominio de una, 199; reflexiva, 183, 212, 233; simétrica, 213, 233; transitiva, 142, 143, 183, 213-215, 233; triádica, 142, 191
Reticulados, 307
Rey Pastor, J., 83
Rhind, papiro, 32, 37
Riemann, B., 96(n), 102, 103; geometría no euclideana de, 96(n), 102, 130, 175
Robinson, A., 301
Rosser, J. Barkley, 287
Russell, B., 39, 45(n), 46, 130, 137, 189, 193, 212, 216, 220, 223, 228-235, 238-241, 243-259, 262, 264, 269, 274, 276, 277, 279, 291, 296, 297; antinomia de, 245, 246, 252, 259, 264, 271; modelo lógico-conjuntista de la axiomática de Peano o modelo, 227-230, 239, 240, 258; reducción de la matemática a la lógica de, véase *Russell, Modelo*; teoría de los tipos de, 249-259, 269, 291; vida y obra de, 230-232. Véase también *Logicismo*
Saccheri, G., 91-94, 102; cuadrilátero de, 91-94
SAFO, sistema axiomático elemental, 135-144; álgebra de Boole como ampliación del sistema, 307-310; interpretaciones y modelos de, 148, 149
SAFOT, como ampliación del sistema SAFO, 148, 149
Sarton, G., 76, 82
Sartre, J. P., 231
Satisfactibilidad de un sistema axiomático, 155, 160, 165, 168, 172
Saturación de un sistema axiomático, 152, 160, 165
Schlick, M., 100
Sección áurea, 54(n)
Semántica, 49, 50, 121, 122, 257, 285, 286, 303
Semejanza: de figuras geométricas, 101, 213, 214; relación de, 213, 214
Semiótica, 29(n), 50
Semántico: contenido, 59, 105, 106, 109, 120, 127, 172, 239, 240; propiedades de un sistema axiomático de carácter, 155-159
Sentido, 119
Sentidos de una recta, 212
Significación, 118

Significado, 50, 64, 69, 70, 98, 104, 106, 109, 114, 120-125, 155, 164, 240, 281, 257, 258, 274; formal, 303
Signos, 122, 123, 162
Siguiente: de un número natural, 224-227, 235, 261, 262, véase *Axiomática de Peano*; de un cardinal, 235, 236. Véase *Modelo Russell*
Silogismo, 113, 137
Símbolos: 114, 117, 191; lógicos, 136-138, 182
Simetría: de una relación binaria, 213, 233; de una relación de equivalencia, 213-215, 233
Sinsentido, 254, 256, 258, 259
Sintáctico, propiedades de un sistema axiomático de carácter, 151-154
Sintaxis, 49, 50, 114, 121, 122, 143, 284-286, 303; aritmetización por Gödel de la, 282-283, 286-289
Sintéticas, proposiciones, 97, 98, 100, 101
Sistema: axiomático o axiomático formal, véase *Axiomático, sistema*; hipotético deductivo, 71, 125, 176, 177, 188, 302, 303; semántico, 162; sintáctico, 118(n), 122-124, 126, 161-164, 187, 188, 240, 274
Sistemas: axiomáticos o axiomáticos formales, véase *Axiomáticos, sistemas*
Sistemática, ambigüedad, 257
Skolem, T., 270
Spinoza, B., 26, 73
Stegmüller, W., 186
Struik, D. J., 36, 82
Stuart Mill, J., 59
Subconjunto (parte), 197, 198, 271, 272; propio, 197
Subsistencia, según Meinong, 298, 299
Sucesiones de expresiones, 283
Sucesor. Véase *Siguiente*
Superficie de una figura geométrica, 212, 214, 215
Suposición. Véase *Hipótesis*
Supremo, 307
Tales de Mileto, 35-40, 42, 45, 61; ideas matemáticas de, 36-38; nociones límite según, 37
Tarski, A., 116, 192, 240(n), 275, 284
Taurinus, F., 95
Techné, 58
Teetetos, 53, 77
Teorema: según Aristóteles, 63, 67, 68, 72; en los *Elementos*, 78, 80, 90, 91, 94, 167
Teoremas de un sistema axiomático, 111, 119, 120, 123-125, 128, 131, 132, 144-148, 151-154, 156, 157, 159-162, 165, 171, 172, 176, 181, 188, 206, 239, 257, 274, 278, 282, 283, 285-289, 302; y metateoremas, 278; no euclideanos, 101-106, 167
Teoría: 26, 34, 60; axiomática de conjuntos de Zermelo, 269-274, 283, 285, 288, 298; clásica o cantoriana de conjuntos, véase *Conjuntos*; de los tipos (Russell), 249-259, 269, 291; hipotético deductiva, 221, véase *Sistema hipotético deductivo*; noción de, 26; ramificada de los tipos, 255, 256; simple de los tipos, 250-255; subyacente a otra, 71
Teorías: axiomáticas de conjuntos, 269, 276, 292, 299; matemáticas presupuestas para poder desarrollar un sistema axiomático, 116, 303; mecánicas, 71; científicas, 72; y metateorías, 278
Teóricas o no observables, entidades, 37, 188, 221
Tercero excluido: principio de, 115, 161, 190, 193, 245, 247, 259, 265, 266, 270;
Términos: de relación, 139, 141, 142, 145, 146, 169; de un sistema axiomático, 117, 140-142; definidos, 63, 70, 118, 140-142, 224; en Aristóteles, 63, 70; específicos o no lógicos, 118, 119, 130, 136, 140, 142, 169, 241; fácticos, 302, 303; lógicos, 118, 136-138, 142, 191; matemáticos, 64, 302, 303; observacionales o em-

Reales, números, véase *Números reales*
Realismo, 60, 65, 219, 250; matemático, 114, 261, 274, 276, 277, 298, 305
Recta: densidad de la, 80; dirección de una, 212, 213, 215, 216; prologación de una, 79; sentidos de una, 212. Véase *Geometría euclideana, Geometrías no euclideanas* y *Geometría analítica*
Reducción: al absurdo, 44, 46, 91, 94, 143, 144, 265, 271; de la matemática a la lógica, véase *Modelo Russell*; por etapas de formalismos de la matemática, véase *Aritmetización de la matemática*
Reductibilidad, axioma de, 258
Referencia, 50, 64, 122, 124, 130
Reflexividad: de una relación binaria, 183, 212, 233; de una relación de equivalencia, 213-215, 233
Reglas: de deducción, 117, 123-125, 139, 140, 161; de definición, 117, 118, 140, 189; de formación, 123; de producción o de transformación, 123, 124, 161, 162; de razonamiento correcto, véase *Forma correcta de razonamiento*; gramaticales, 104, 109; morfológicas, 117-119, 142
Regreso al infinito, 61-63
Relación, 48, 118, 137, 139, 140, 155, 193, 250-254, 256; arreflexiva, 142, 143; asimétrica, 142, 143; biunívoca entre conjuntos, 197-199; codominio de una, 199; conversa de una, 141; de coordinabilidad, 234; de equidescomposición, 214, 215; de equivalencia, 213-217; de identidad, 136, 138, 213; de inclusión, 197, 272; de paralelismo, 212, 215, 216; de pertenencia, 196, 197; de semejanza, 213-214; diádica o binaria, 116, 117, 139, 141, 143, 191; dominio de una, 199; reflexiva, 183, 212, 233; simétrica, 213, 233; transitiva, 142, 143, 183, 213-215, 233; triádica, 142, 191
Reticulados, 307
Rey Pastor, J., 83
Rhind, papiro, 32, 37
Riemann, B., 96(n), 102, 103; geometría no euclideana de, 96(n), 102, 130, 175
Robinson, A., 301
Rosser, J. Barkley, 287
Russell, B., 39, 45(n), 46, 130, 137, 189, 193, 212, 216, 220, 223, 228-235, 238-241, 243-259, 262, 264, 269, 274, 276, 277, 279, 291, 296, 297; antinomia de, 245, 246, 252, 259, 264, 271; modelo lógico-conjuntista de la axiomática de Peano o modelo, 227-230, 239, 240, 258; reducción de la matemática a la lógica de, véase *Russell, Modelo*; teoría de los tipos de, 249-259, 269, 291; vida y obra de, 230-232. Véase también *Logicismo*
Saccheri, G., 91-94, 102; cuadrilátero de, 91-94
SAFO, sistema axiomático elemental, 135-144; álgebra de Boole como ampliación del sistema, 307-310; interpretaciones y modelos de, 148, 149
SAFOT, como ampliación del sistema SAFO, 148, 149
Sarton, G., 76, 82
Sartre, J. P., 231
Satisfactibilidad de un sistema axiomático, 155, 160, 165, 168, 172
Saturación de un sistema axiomático, 152, 160, 165
Schlick, M., 100
Sección áurea, 54(n)
Semántica, 49, 50, 121, 122, 257, 285, 286, 303
Semejanza: de figuras geométricas, 101, 213, 214; relación de, 213, 214
Semiótica, 29(n), 50
Semántico: contenido, 59, 105, 106, 109, 120, 127, 172, 239, 240; propiedades de un sistema axiomático de carácter, 155-159
Sentido, 119
Sentidos de una recta, 212
Significación, 118

Significado, 50, 64, 69, 70, 98, 104, 106, 109, 114, 120-125, 155, 164, 240, 281, 257, 258, 274; formal, 303
Signos, 122, 123, 162
Siguiente: de un número natural, 224-227, 235, 261, 262, véase *Axiomática de Peano*; de un cardinal, 235, 236. Véase *Modelo Russell*
Silogismo, 113, 137
Símbolos: 114, 117, 191; lógicos, 136-138, 182
Simetría: de una relación binaria, 213, 233; de una relación de equivalencia, 213-215, 233
Sinsentido, 254, 256, 258, 259
Sintáctico, propiedades de un sistema axiomático de carácter, 151-154
Sintaxis, 49, 50, 114, 121, 122, 143, 284-286, 303; aritmetización por Gödel de la, 282-283, 286-289
Sintéticas, proposiciones, 97, 98, 100, 101
Sistema: axiomático o axiomático formal, véase *Axiomático, sistema*; hipotético deductivo, 71, 125, 176, 177, 188, 302, 303; semántico, 162; sintáctico, 118(n), 122-124, 126, 161-164, 187, 188, 240, 274
Sistemas: axiomáticos o axiomáticos formales, véase *Axiomáticos, sistemas*
Sistemática, ambigüedad, 257
Skolem, T., 270
Spinoza, B., 26, 73
Stegmüller, W., 186
Struik, D. J., 36, 82
Stuart Mill, J., 59
Subconjunto (parte), 197, 198, 271, 272; propio, 197
Subsistencia, según Meinong, 298, 299
Sucesiones de expresiones, 283
Sucesor. Véase *Siguiente*
Superficie de una figura geométrica, 212, 214, 215
Suposición. Véase *Hipótesis*
Supremo, 307
Tales de Mileto, 35-40, 42, 45, 61; ideas matemáticas de, 36-38; nociones límite según, 37
Tarski, A., 116, 192, 240(n), 275, 284
Taurinus, F., 95
Techné, 58
Teetetos, 53, 77
Teorema: según Aristóteles, 63, 67, 68, 72; en los *Elementos*, 78, 80, 90, 91, 94, 167
Teoremas de un sistema axiomático, 111, 119, 120, 123-125, 128, 131, 132, 144-148, 151-154, 156, 157, 159-162, 165, 171, 172, 176, 181, 188, 206, 239, 257, 274, 278, 282, 283, 285-289, 302; y metateoremas, 278; no euclideanos, 101-106, 167
Teoría: 26, 34, 60; axiomática de conjuntos de Zermelo, 269-274, 283, 285, 288, 298; clásica o cantoriana de conjuntos, véase *Conjuntos*; de los tipos (Russell), 249-259, 269, 291; hipotético deductiva, 221, véase *Sistema hipotético deductivo*; noción de, 26; ramificada de los tipos, 255, 256; simple de los tipos, 250-255; subyacente a otra, 71
Teorías: axiomáticas de conjuntos, 269, 276, 292, 299; matemáticas presupuestas para poder desarrollar un sistema axiomático, 116, 303; mecánicas, 71; científicas, 72; y metateorías, 278
Teóricas o no observables, entidades, 37, 188, 221
Tercero excluido: principio de, 115, 161, 190, 193, 245, 247, 259, 265, 266, 270;
Términos: de relación, 139, 141, 142, 145, 146, 169; de un sistema axiomático, 117, 140-142; definidos, 63, 70, 118, 140-142, 224; en Aristóteles, 63, 70; específicos o no lógicos, 118, 119, 130, 136, 140, 142, 169, 241; fácticos, 302, 303; lógicos, 118, 136-138, 142, 191; matemáticos, 64, 302, 303; observacionales o em-

píricos, 220, 221; presupuestos, 118; primitivos, 63, 70, 118-121, 125, 127, 140-142, 147, 161, 162, 169, 173, 178, 224; teóricos, 37, 43, 45, 220
Tesis (Aristóteles), 68, 69
Thuillier, P., 305
Tipo, 250-255, 260
Tipos: teoría de los, 249-259, 269, 291; teoría ramificada de los, 255, 256, 258; teoría simple de los, 250-255, 258; dificultades de la teoría de los, 256-259
Tradición: axiomática de la matemática; 181; computacional de la matemática, 181, 182; estructural de la matemática, 183-187
Tradiciones en la historia de la matemática, 181-187
Transfinitos, números, véase *Números transfinitos*
Transitividad: de una relación binaria, 142, 143, 183, 213-215, 233; de una relación de equivalencia, 213-215, 233
Unión de conjuntos ("∪"), 196, 273, 309
Universales, 48, 49
Uso contextual, 212
Vacía, clase o conjunto vacío, 198, 235, 270-273, 238, 309
Variable: dominio de valores de una, 138; valor de una, 138, 191
Variables, 104, 138-142, 145, 147, 158, 191, 293; de individuo o individuales, 138, 141
Verdad: 61, 114, 162, 282; criterio aristotélico de, 64, 65, 119, 121, 125, 128, 162, 187(n); evidente de los axiomas, 68; lógica, 140, 162, 163, 190; matemática, 30, 98, 99, 121; racional, 38; según el neointuicionismo, 264; semirracional, 38; sintáctica, 121, 128, 171
Verdades: *a posteriori*, 98; *a priori*, 98-100; de razón, 65
Verificación, 59, 63
Viète, F., 112
Vocabulario: 63, 70, 104, 111; de un sistema axiomático, 117, 136, 275; específico, 118, 119; lógico, 118, 138
Wallis, J., 91
Weyl, H., 260, 266
Whitehead, A. N., 57, 230, 240, 249,
Wittgenstein, L., 257, 279
Zenón de Elea, 45-47, 295, 296
Zermelo, E., 269, 270; axiomas de, 269-274; teoría axiomática de conjuntos de, 269-274, 283, 285, 288, 298

A•Z editora ha dado término a la impresión de esta obra
en los talleres gráficos de Longseller S.A., Costa Rica y Panamericana Km 35,
Malvinas Argentinas, Buenos Aires, República Argentina,
en el mes de julio de 2005.

LAS DESVENTURAS DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

is Borges que "la matemática no se mplementan como ave". Efectivamenadora del matemáimaginación, tiene con la que demane obras pictóricas, s por parte de los icio de Borges paia a lo que habimatemática pura, ial el investigador vidades para proarácter lógico-lintes con el mundo importa también licaciones, ya que no la física, la ecoa, allí donde es nelenguajes numéricespecíficos, es un ensable. Sin emran los autores de ad de la que alguda la "reina de las bre de cuestiona. Preguntas tales entidades matese de conocimientemática?", "¿por qué debemos creer en lo que afirman los matemáticos?" o bien "¿podemos garantizar que las teorías matemáticas no conducen a contradicciones?" tienen una profunda significación filosófica y siguen dando lugar en la actualidad a numerosas controversias. Este libro se centra, precisamente, en el problema de fundamentar la matemática y de dotarla de rigor metodológico, epistemológico y filosófico, una ardua tarea emprendida por matemáticos y lógicos a lo largo de los siglos XIX y XX. Así, los autores presentan, entre otros, el notable descubrimiento de las geometrías no euclideanas, la introducción de la noción de "sistema axiomático formal", el problema generado por la necesidad de probar la coherencia de la disciplina y los inquietantes resultados de Kurt Gödel sobre las limitaciones de los formalismos matemáticos. En un lenguaje no especializado pero riguroso, *Las desventuras del conocimiento matemático* expone, en síntesis, una introducción a los múltiples y fascinantes universos filosóficos que convoca la matemática, una de las creaciones más elevadas que puede ofrecer la historia de la civilización.

Serie
La ciencia y la gente

ISBN 950-534-796-0
9 799505 347963